STUDIEN

über die Hinterlassenen-Versicherung in der Sozialversicherung der Schweiz

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

WILLY WUNDERLIN

von **Mumpf** (Aargau)

Buchdruckerei Dr. J. Weiss, Affoltern am Albis ● 1934

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn Prof. Friedli angenommen.

Bern, den 22. Februar 1934.

Der Dekan:
Prof. Dr. Hugi.

Studien

über die Hinterlassenenversicherung in der Sozialversicherung der Schweiz

INAUGURALDISSERTATION

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Willy Wunderlin

von Mumpf, Aargau

Buchdruckerei Dr. J. Weiß, Affoltern am Albis — 1934

Es ist mir ein Bedürfnis, an dieser Stelle den Herren Prof. Moser, Prof. Friedli, Prof. Crelier, Prof. Scherrer und Prof. Mauderli für die mir während des Studiums erwiesene Unterstützung und Anregung meinen besten Dank auszusprechen.

Zu ganz besonderem Dank bin ich Herrn Prof. Bohren verpflichtet. Durch seine reichen Anregungen und unter seiner Leitung konnte die vorliegende Arbeit entstehen und durchgeführt werden.

Willy Wunderlin.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 1

1. Kap.: Das Berechnungssystem

I. Die gesetzlichen Bestimmungen 3

II. Berechnungssystem und Abstufung der Rentenbarwerte . 9

III. Mathematische Grundlagen zur Bestimmung der Barwerte 12

2. Kap.: Die statistischen Grundlagen

I. Die Sterblichkeit der Witwen 22

II. Die Wiederverheiratung der Witwen 23

3. Kap.: Fehlerbestimmungen

I. Einleitung 28

II. Fehler, aus dem Berechnungssystem selbst 29

III. Fehler infolge von Näherungen und Annahmen bei der Berechnung der Barwerte 34

IV. Schlußbemerkung 36

4. Kap.: Beharrungszustand

I. Einleitung 36

II. Theoretischer Aufbau 36

III. Praktische Auswertung und Anwendung auf die Hinterlassenenversicherung 42

5. Kap.: Ueber Verbindungsrenten

I. Die Verbindungsrente im weitern Sinne 52

II. Verbindungsrenten auf das längste Leben 66

6. Kap.: Beurteilung des bestehenden Berechnungssystems und Möglichkeiten einer einfacheren Berechnungsart 95

Zahlentabellen.

Seite

1. Relative Altersverteilung der S. U. V. A.-Witwen und der Witwen der Militärversicherung, je für den Eintrittsbestand und im Beharrungszustand 98

2. Relative Entwickung der Personenbestände bis zum Beharrungszustand 98

3. Relative Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen bis zum Beharrungszustand bei Lohnsatz 100 98

4. Absolute Entwicklung der Personenbestände bis zum Beharrungszustand 99

5. Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen bis zum Beharrungszustand 99

6. Entwicklung der Deckungskapitalien bis zum Beharrungszustand 99

7. Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen und der Deckungskapitalien bis zum Beharrungszustand bei variablem Lohnsatz . 100

Graphische Darstellungen.

I. Mögliche Ausscheidereihenfolgen eines anfänglichen Familienstandes, bestehend aus: 1 Witwe, 3 Kinder und mehreren Ascendenten 7

II. Relative Altersverteilung der S. U. V. A.-Witwen beim Eintrittsbestand und im Beharrungszustand 45

III. Relative Altersverteilung der Witwen der Militärversicherung beim Eintrittsbestand und im Beharrungszustand 45

IV. Entwicklung des Witwenbestandes und der jährlichen Rentenzahlungen an Witwen bis zum Beharrungszustand bei Lohnsatz 100 48

Studien über die Hinterlassenenversicherung in der Sozialversicherung der Schweiz.

Einleitung.

Alle die großen schweizerischen Sozialversicherungsinstitutionen, wie die schweiz. Unfallversicherung, die Militärversicherung, die Alters- und Hinterbliebenenversicherung der eidg. Beamten und Angestellten und der schweizerischen Bundesbahnen, sowie die meisten Pensionskassen weisen in ihren gesetzlichen oder statutarischen Bestimmungen bezüglich der Versicherungsleistungen an Hinterbliebene entsprechende Bedingungen auf. Nebst Witwenrenten können auch Rentenansprüche minderjähriger Kinder oder Ansprüche einer gewissen Auslese von Verwandten und Geschwistern bestehen, so daß wir als Gesamtleistung an die Hinterlassenenschaft eines Versicherten einen ganzen Rentenkomplex haben. Dabei darf die Höhe des Gesamtrentenbezuges ein gewisses Maximum nicht übersteigen. Ueber den Beginn und die Sistierung der Einzelrenten, über die Höhe des Rentenbezuges der Einzelrentner und des ganzen Komplexes, sowie über die Reihenfolge der Bezugsberechtigten können mannigfache Bestimmungen getroffen sein.

Die Höhe der Ansprüche für die rentenberechtigten Einzelpersonen wird allgemein abgestuft nach Prozenten des versicherten jährlichen Lohnes. Damit erhalten wir für die Gliederung des gesamten Rentenkomplexes allgemein die folgende Uebersicht:

1. Witwenrente von a % des jährl. vers. Lohnes.
2. Kinderrenten von je b % des jährl. vers. Lohnes.
3. Ascendenten und Geschwisterrenten von c % des jährl. vers. Lohnes.

Für die maximale Höhe des Gesamtanspruches des Komplexes besteht im allgemeinen die einschränkende Bestimmung, daß sie d % des vers. jährl. Lohnes nicht übersteigen darf.

Aus dieser Einschränkung ergeben sich die Bedingungen bezüglich Reihenfolge der Bezugsberechtigten, sowie Beginn und Sistierung der Einzelrenten. Die einschränkende Bestimmung hat weiter zur Folge, daß wir nebst einem Komplex laufender Renten auch aufgeschobene Renten haben, wobei die Höhe der einzelnen Rentenbezüge gekürzt sein kann.

Diese verwickelte Zusammensetzung des Rentenkomplexes gestaltet die versicherungstechnische Berechnung der Barwerte und der Deckungskapitalien der Hinterlassenenrenten schwierig. Die theoretische und praktische Erörterung des damit verbundenen Berechnungssystems sollen hier eingehend behandelt werden, und es soll insbesondere untersucht werden, ob an Stelle des gegenwärtig zur Anwendung kommenden Systems nicht ein einfacheres gesetzt werden kann. Diese Aufgabe führt zu einer theoretischen Behandlung der Verbindungsrenten auf das längste Leben, deren Resultate allgemein nicht ohne Interesse sind.

Als Finanzsystem gilt allgemein das Deckungskapitalverfahren.

Das Bundesgesetz über die schweizerische obligatorische Unfallversicherung, vom 13. Juni 1911, sieht für die Hinterlassenen tödlich Verunfallter sehr weitgehende Leistungen vor, so daß die Gliederung des ganzen Rentenkomplexes hier in ausgebautester Form in Erscheinung tritt.

Die Ergebnisse einer Untersuchung dieses Hinterlassenenkomplexes dürfen daher Allgemeingültigkeit beanspruchen, so daß andere, einfacher aufgebaute Komplexe als Spezialfälle aufgefaßt und behandelt werden können. Unsere weiteren Ausführungen betreffen also zur Hauptsache die Hinterlassenenrente nach dem Gesetze über die schweiz. Unfallversicherung, vom Jahre 1911.

Als Beispiel eines einfacher aufgebauten Komplexes führen wir parallel die Hinterlassenenrente in der Militärversicherung an.

1. Kapitel.

Das Berechnungssystem.

I. Eingehende Erörterung der gesetzlichen Bestimmungen.

A. Unfallversicherung.

Im Falle des Todes infolge Unfall sieht das Gesetz Rentenleistungen vor an die Hinterlassenen, die bestehen in:

1. Witwenrente von 30 % des verlorenen jährlichen Lohnes, lebenslänglich oder bis zur Wiederverehelichung.

   Einmalige Witwenabfindung in der Höhe des dreifachen Betrages der Jahresrente im Wiederverheiratungsfalle.
2. Kinderrenten (einfache Waisenrenten) von 15% des Lohnes bis zur Erfüllung des 16. Altersjahres oder bis zum Alter 70 des Getöteten bei dauernder Erwerbsunfähigkeit.
3. Doppelwaisenrenten von 25 % des Lohnes bis zur Erfüllung des 16. Altersjahres oder bis zum Alter 70 des Getöteten bei dauernder Erwerbsunfähigkeit.
4. Ascendenten- und Geschwisterrente von 20 % des Lohnes lebenslänglich, bzw. bis zur Erfüllung des 16. Altersjahres.

Dabei besteht die Einschränkung daß die Gesamtrente 60 % des jährlichen Lohnes nicht übersteigen darf, wobei die Witwe und die Kinder erstberechtigt sind.

Die Ascendenten- und Geschwisterrente bleibt demnach solange gekürzt, als die Witwen- und Kinderrenten zusammen mehr als 40 % des Jahresverdienstes ausmachen. Während dieser Zeit bleibt aber anderseits die gesamte Hinterlassenenrente auf dem konstanten Betrag von 60 %. Eine Kürzung der Ascendenten- und Geschwisterrente kann auch eintreten, wenn nur ein Ascendent vorhanden ist, indem sein Anspruch nicht höher sein darf als der Anspruch einer gleichzeitig laufenden Kinderrente.

Aus der Vielseitigkeit der Rentenansprüche geht schon hervor, daß die gesamte Hinterlassenenrente in Bezug auf ihre Zusammensetzung aus den Einzelrenten eine Fülle von Möglichkeiten zuläßt. Die Tabelle auf Seite 5 gibt eine Uebersicht dieser Möglichkeiten.

Um die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Kombinationen zu veranschaulichen, geben wir nachstehend die

Prozentuale Zusammensetzung der Hinterlassenenschaft bei Rentenbeginn.

1. Keine rentenberechtigte Hinterlassene	9,3 %
2. Nur Witwen	15,9 %
3. Nur Waisen	2,0 %
4. Nur Ascendenten und Geschwister	27,0 %
5. Witwen und Waisen	17,3 %
6. Witwen und Ascendenten	5,4 %
7. Waisen und Ascendenten	1,7 %
8. Witwen, Waisen und Ascendenten	20,5 %
9. Sofortige Abfindung	0,9 %
Total =	100,0 %

Verfolgen wir den zeitlichen Verlauf der einzelnen Hinterlassenenrente, so erkennen wir, daß ihre Zusammensetzung aus den Einzelrenten ständig wechselt. Eine einzige Rente kann nacheinander eine ganze Reihe der erwähnten Kombinationen aus Einzelrenten durchlaufen, bis alle Hinterlassenen aus der Ren-

Möglichkeiten der Zusammensetzung der Hinterlassenenrente aus Einzelrenten und Höhe der ausgerichteten Renten in %.

Familienstand der rentenberechtigt. Hinterlassenenschaft	Ausgerichtete Renten in Prozent		Familienstand der rentenberechtigt. Hinterlassenenschaft	Ausgerichtete Renten in Prozent		Familienstand der rentenberechtigt. Hinterlassenenschaft	Ausgerichtete Renten in Prozent		Familienstand der rentenberechtigt. Hinterlassenenschaft	Ausgerichtete Renten in Prozent	
	ungekürzt	gekürzt		ungekürzt	gekürzt		ungekürzt	gekürzt		ungekürzt	gekürzt
Witwe	30		Witwe		30	Witwe		24	2 Doppelw.		50
1 Kind	15		1 Kind		15	3 Kinder		36	1 Ascend.		10
			1 Ascend.		15	mehrere Ascend.		—	Total		60
Total	45		Total		60	Total		60			
Witwe	30		Witwe		30	1 Doppelw.	25		2 Doppelw.		50
2 Kinder	30		2 Kinder		30				mehrere Ascend.		10
			1 Ascend.			2 Doppelw.	50		Total		60
Total	60		Total		60						
Witwe		24	Witwe		24	3 Doppelw.		60	3 Doppelw.		60
3 Kinder		36	3 Kinder		36				1 Ascend.		—
			1 Ascend.		—	4 Doppelw.		60	Total		60
Total		60	Total		60						
Witwe	30		Witwe		30	1 Doppelw.	25		3 Doppelw.		60
			1 Kind		15	1 Ascend.	20		mehrere Ascend.		—
1 Ascend.	20		mehrere Ascend.		15	Total	45		Total		60
Total	50		Total		60						
Witwe	30		Witwe		30	1 Doppelw.	25		1 Ascend.	20	
			2 Kinder		30	mehrere Ascend.	20				
mehrere Ascend.	20		mehrere Ascend.		—	Total	45		mehrere Ascend.	20	
Total	50		Total		60						

tenberechtigung ausgeschieden sind. Je nach der Ausscheidereihenfolge der rentenberechtigten Hinterlassenen durchläuft die Hinterlassenenrente die verschiedenartigsten Kombinationen aus Einzelrenten.

Um auch hier einen Ueberblick über die Fülle von Möglichkeiten zu erhalten, sind in Darstellung I für eine anfängliche rentenberechtigte Hinterlassenenschaft, bestehend aus einer Witwe, drei Kindern und mehreren Ascendenten die möglichen Ausscheidereihenfolgen zusammengestellt. Wir erkennen, daß für diesen Fall insgesamt 240 verschiedene Ausscheidereihenfolgen möglich sind, bis keine Rentenberechtigte mehr vorhanden sind. Aus der prozentualen Zusammensetzung der Hinterlassenenschaft ersehen wir, daß für ca. 20 % der Renten eine derartig große Fülle von Ausscheidereihenfolgen in Frage kommt. Die Darstellung I gestattet leicht, auch für jede einfachere anfängliche Zusammensetzung der Hinterlassenenschaft die Anzahl möglicher Ausscheidereihenfolgen herauszulesen. Das Gewicht, das den einzelnen Ausscheidereihenfolgen zukommt, ist aus der prozentualen Zusammensetzung der Hinterlassenenschaft ebenfalls feststellbar.

Ich möchte noch anführen, daß die einfachen Regeln der Kombinatorik hier nicht anwendbar sind, da die einzelnen Elemente nicht gleichwertig sind.

B. Militärversicherung.

Die Versicherungsleistungen an Hinterlassene sind durch das Gesetz wie folgt geregelt:

1. Witwenrente von 40 % des Jahresverdienstes des Verstorbenen, lebenslänglich oder bis zur Wiederverehelichung. Einmalige Witwenabfindung in der Höhe des dreifachen Betrages der Jahresrente im Wiederverheiratungsfalle.
2. Kinderrenten (einfache und Doppelwaisenrenten) von 25 % des Jahresverdienstes bis zur Erfüllung des 18. Altersjahres oder lebenslänglich bei dauernder Erwerbsunfähigkeit.
3. Elternrenten, lebenslänglich von:
   a) 20 % bei einfacher Rente (nur ein Elternteil am Leben),
   b) 35 % bei verbundener Rente (beide Eltern am Leben).

Mögliche Ausscheidereihenfolgen

eines anfänglichen Familienstandes

bestehend aus

1 Witwe
3 Kindern
Mehreren Ascendenten

Darstellung I.

Legende:

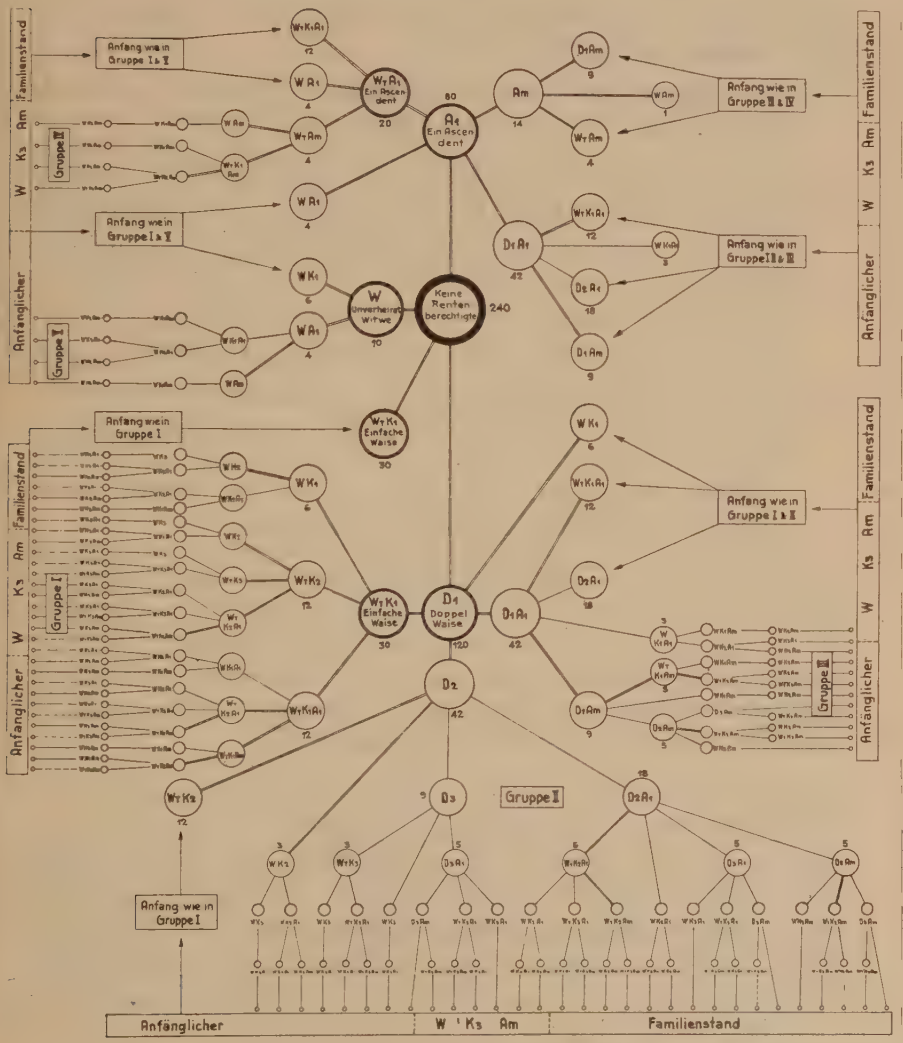
$W_1K_1A_1$ Familienstand
Verheiratete Witwe, 1 Kind u. 1 Ascendent

Es bedeuten

W : Unverheiratete Witwe
W_1 : Verheiratete Witwe
Ki : i Kinder
Di : i Doppelwaisen
A_1 : 1 Ascendent
Am : mehrere Ascendenten

Gekürzte Renten (Familienrente)
Ungekürzte Einzelrenten

Ziffern geben die möglichen Ausscheidereihenfolgen an zur Errechnung des vorliegenden Familienstandes aus dem ursprünglichen Familienstande W Ks Am



4. Elternlose Geschwister- und Großeltern-Renten von
   a) 15 % bei einfacher Rente,
   b) 25 % bei verbundener Rente
   bis zur Erreichung des 18. Altersjahres bzw. lebenslänglich.

Neben diesen grundlegenden Ansätzen für die Rentenansprüche sind für die Bildung des Komplexes noch folgende Einschränkungen bestimmend:

1. Die Gesamtrente des Komplexes darf 65 % des verlorenen Jahresverdienstes nicht übersteigen.
2. Eltern, elternlose Geschwister und Großeltern sind nur rentenberechtigt, wenn keine Witwe und keine Kinder vorhanden sind, oder wenn diese aus der Rentenberechtigung ganz ausgeschieden sind. Dabei schließen die Eltern die Geschwister und diese die Großeltern für solange von der Rentenberechtigung aus, als je die ersten selbst Rente ziehen.
3. Für die Rentenberechtigung aller Ascendenten ist zudem die Bedürfnisklausel maßgebend, wonach nur Ascendenten in den Rentengenuß eintreten, die bedürftig sind, denen durch den Tod des Versicherten wirklich ein Schaden erwachsen ist, oder die an ihm eine Hilfe verloren haben.

Wir erkennen leicht, daß durch diese drei einschränkenden Bestimmungen die Zahl der Kombinationsmöglichkeiten gegenüber der Unfallversicherung ganz erheblich herabgemindert wird. Damit wird auch die Zahl der Ausscheidereihenfolgen kleiner, so daß das Berechnungssystem in der Militärversicherung wesentlich einfacher wird als in der Unfallversicherung.

Meines Erachtens sollten die Bestimmungen 2 und 3 bei einer Gesetzesrevision auch für die Unfallversicherung vorgeschlagen werden. Einmal wird dadurch die Rentenberechtigung gerechter und logischer und zudem werden noch verschiedene praktische und technische Fragen wesentlich einfacher zu lösen sein. Aus dieser Maßnahme würde für die Unfallversicherungsanstalt im Beharrungszustand schätzungsweise eine jährliche Ersparnis von 1 Million Fr. resultieren.

II. Berechnungssystem und Abstufung der Rentenbarwerte.

A. Unfallversicherung.

Gleich wie im entwickelten Beispiel so zeigt sich auch allgemein, daß in der großen Mehrzahl der Fälle sowohl die Witwen- und Kinderrenten, als auch die Ascendenten- und Geschwisterrenten ihren vollen Betrag dann erreichen, wenn ein bestimmtes Kind sein 16. Altersjahr zurückgelegt hat. Bis zu diesem Zeitpunkt wird nun die Sterblichkeit der Hinterbliebenen und die Wiederverheiratungswahrscheinlichkeit der Witwe außer Betracht gelassen und für die ganze Hinterbliebenenrente, die wir in diesem Falle als Familienrente bezeichnen, eine einfache Zeitrente eingesetzt, deren Dauer vom Alter dieses bestimmten Kindes, dem sogenannten maßgebenden Kind abhängt.

Auf Grund dieser Betrachtung ergibt sich für die Berechnung der Barwerte und des Deckungskapitals der Hinterlassenenrenten die folgende Gliederung:

1. Für den Fall, daß das Zusammentreffen der Witwen-, Kinder-, Ascendenten- und Geschwisterrenten keine Kürzung der Einzelrenten gemäß Art. 87 des Gesetzes bedingt, kann das Deckungskapital für jede einzelne Rente getrennt bestimmt werden, indem wir dann lauter laufende Leibrenten zu betrachten haben. Es ergibt sich ohne weiteres, daß diese sofort beginnenden, ungekürzten Einzelrenten nach dem zurückgelegten Altersjahr des Rentners abzustufen sind.

2. Tritt eine Kürzung der Renten nach Art. 87 des Gesetzes ein, so trennt man die Hinterbliebenenrente in die Familienrente und die aufgeschobenen Einzelrenten. Die Familienrente beginnt sofort und läuft als gewöhnliche konstante Zeitrente bis zu dem Zeitpunkte, wo infolge Wegfall einer bestimmten Kinderrente die einzelnen Renten ihren vollen Betrag erreichen. Die aufgeschobenen Einzelrenten beginnen erst in diesem Zeitpunkte und sind im übrigen wie die Renten unter 1) zu behandeln.

Die Dauer der Familienrente, d. h. die Gesamtheit der gekürzten Renten wird nach dem Alter desjenigen Kindes abgestuft, mit dessen Ausscheiden aus dem Rentengenuß gleichzeitig die Witwenrente, die Kinderrenten und die Geschwister- und Ascendentenrente ihren vollen Betrag erreichen. Die erst in diesem Zeitpunkte beginnenden, ungekürzten Einzelrenten werden sowohl nach dem Alter des Rentners, als auch nach dem Alter des maßgebenden Kindes abgestuft.

B. Militärversicherung.

Das ganze Berechnungssystem lehnt sich eng an dasjenige der S. U. V. A. an.

Die Hinterlassenenrenten teilen sich, gestützt auf das Gesetz, in 4 Kategorien:

a) Witwen und Kinder,

b) Eltern,

c) Elternlose Geschwister,

d) Großeltern.

Diese 4 Kategorien schließen sich der Reihe nach vom Rentengenuß aus, d. h. sie können nicht nebeneinander bestehen. Dagegen besteht die Möglichkeit, daß sie nacheinander in den Rentengenuß treten; wenn nämlich der Rentenanspruch der einen Gruppe aufhört, kann jener einer andern Kategorie beginnen. Diese Möglichkeit kann berücksichtigt werden als Anwartschaft der Ascendenten auf Rente, wenn Witwe und Kinder ausgeschieden sind. Die Anwartschaft ist zahlenmäßig sehr klein, denn die Fälle des Ueberganges von einer Gruppe zur andern sind selten. Zudem würde ihre Berücksichtigung die Rechnung in einer Weise komplizieren, die den Arbeitsaufwand nicht lohnt.

Somit haben wir die 4 Kategorien für die Berechnung nur noch einzeln zu betrachten.

A. Witwen und Kinder.

Entsprechend der Unfallversicherung unterscheiden wir hier auch einfache und kombinierte Fälle, je nachdem der unverkürzte

Anspruch der Rentenberechtigten 65 % und weniger, oder aber mehr als 65 % des Verdienstes ausmacht.

Einfach sind die Fälle:

1. Eine Witwe.
2. Eine Witwe und ein Kind.
3. Eine Doppelwaise.
4. Zwei Doppelwaisen.

Es handelt sich dann um gewöhnliche, laufende Witwen- und Kinderrenten.

Als kombiniert sind folgende Fälle zu betrachten:

1. Die Witwe und mehrere Kinder.
2. Drei oder mehrere Doppelwaisen.

Wie in der Unfallversicherung wird auch hier die Hinterbliebenenrente in die Familienrente und die aufgeschobenen Einzelrenten getrennt. Als maßgebende Kinder kommen in Frage:

1. bei Witwe und mehreren Kindern immer das zweitjüngste,
2. bei drei und mehreren Doppelwaisen immer das drittjüngste.

Für eine Witwe und mehrere Kinder ergibt sich demnach die Zerlegung:

a) Zeitrente von 65 % bis zum Ausscheiden des zweitjüngsten Kindes;

b) eine bis zu diesem Zeitpunkt aufgeschobene Witwenrente von 40 %;

c) eine bis zu diesem Zeitpunkt aufgeschobene Kinderrente von 25 %.

B. Die Kategorien b—d

sind laufende einfache oder verbundene Ascendentenrenten auf höchstens zwei Leben und als solche einfach zu berechnen.

Im allgemeinen entspricht die Abstufung der Rentenbarwerte derjenigen in der Unfallversicherung.

III. Mathematische Grundlage zur Bestimmung der Barwerte.

1. Zusammenstellung der gebräuchlichen Formeln.

α. **Die sofort beginnende lebenslängliche Leibrente:**

(1) $$a_x = \frac{N_x}{D_x} \; ; \quad {}^{(12)}a_x = a_x - 0{,}466$$

(2) $$\bar{a}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^\infty v^t l_{x+t}\,dt = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu_{x+\tau}+\delta)\,d\tau}\,dt.$$

β. **Die sofort beginnende temporäre Leibrente:**

(3) $$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

(4) $$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu_{x+\tau}+\delta)\,d\tau}\,dt.$$

γ. **Die aufgeschobene lebenslängliche Leibrente:**

(5) $${}_{m|}a_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

(6) $${}_{m|}\bar{a}_x = \int_m^\infty e^{-\int_0^t (\mu_{x+\tau}+\delta)\,d\tau}\,dt.$$

δ. **Die aufgeschobene temporäre Leibrente:**

(7) $$ {}_{m|}a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} $$

(8) $$ {}_{m|}a_{x:\overline{n}|} = \int_m^{m+n} e^{-\int_0^t (\mu_{x+\tau} + \delta)\, d\tau}\, dt $$

ε. **Rekursionsformeln:**

(9) $$ a_x = 1 + v \cdot p_x\, a_{x+1} $$

(10) $$ A_x = v\,(q_x + p_x\, A_{x+1}) $$

(11) $$ a_{x:\overline{n}|} = v\, p_x\, a_{x+1:\overline{n-1}|} + 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

(12) $$ {}_{m|}a_x = v^m_m p_x\, a_{x+m} $$

(13) $$ {}_{m|}a_{x:\overline{n}|} = v^m\, {}_m p_x\, a_{x+m:\overline{n}|} $$

2. Die laufenden Einzelrenten.

a. Die laufende Witwenrente ist abhängig von der Sterblichkeit q_y^w und der Wiederverheiratungswahrscheinlichkeit h_y^w.

Als Verbleibswahrscheinlichkeit für Witwen ergibt sich also:

(14) $$ w_y = (1 - q_y^w)\,(1 - h_y^w) = p_y^w - h_y^w + q_y^w \cdot h_y^w $$

d. i. die Wahrscheinlichkeit, daß eine y-jährige Witwe nach einem Jahre noch unverheiratet lebt, also dem Rentnerbestande noch angehört. Hieraus läßt sich eine Abgangsordnung für Witwen konstruieren. Der Bestand im Alter $(t+1)$ ergibt sich aus dem Bestande im Alter t:

(15) $$H^w_{t+1} = H^w_t (1 - q^w_t)\ (1 - h^w_t)$$

Die Berechnung der Barwerte erfolgt nach (9), indem wir setzen:

(16) $$a^w_y = 1 + v\, w_y \cdot a^w_{y+1}$$

wobei wir als Ausgangswerte annehmen:

(16 a) $$h^w_{60} = 0 \quad ; \quad q^w_{100} = 0$$

Wir erhalten dann:

(17)
$$\left\{ \begin{array}{l} a^w_{60+y} = a_{60+y} \\ a^w_{59} \quad = 1 + v\, w_{59}\, a_{60} \\ a^w_{58} \quad = 1 + v\, w_{58}\, a^w_{59} \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Nun bleibt noch die Witwenabfindung in der Höhe des dreifachen Betrages der Jahresrente im Wiederverheiratungsfalle zu berücksichtigen. Nach (10) läßt sie sich wie folgt berechnen:

(18) $$A^w_y = v\left[h^w_y (1 - q^w_y) + w_y\, A^w_{y+1}\right]$$

Mit den Ausgangswerten (16 a) erhalten wir auch hier ein Berechnungssystem entsprechend (17). Als Gesamtbarwert für die Witwenrente erhalten wir:

(19) $$W_y = a^w_y + 3 A^w_y$$

b. Die laufenden Kinderrenten werden ausgerichtet bis zur Erfüllung des 16. Altersjahres, sind also terminierte Renten auf das Alter 16. Zudem haben wir zu unterscheiden zwischen einfachen Waisenrenten und Doppelwaisenrenten.

α. **Die Doppelwaisenrenten:**

Als Ausscheideursache wirkt nur die Sterblichkeit, so daß wir als Verbleibswahrscheinlichkeit für die Doppelwaisen erhalten:

(20) $$p_x^d = 1 - q_x = p_x$$

Als Rekursionsformel zur Barwertberechnung ergibt sich nach (11) indem wir für n = 16-x setzen:

(21) $$K^d_{x\,;\,\overline{16-x}|} = v \cdot p_x \, K^d_{x+1\,:\,\overline{16-x}|} + 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

β. **Einfache Waisenrenten:**

Sie sind abhängig von der Sterblichkeit q_x und von der Doppelverwaisung o_x. In Bezug auf die Wahrscheinlichkeit der Doppelverwaisung sei bemerkt, daß ihre Berechnung nicht einfach ist und eine doppelte Abstufung nach dem Alter der Witwe und dem Alter des Kindes verlangt.

Als Verbleibswahrscheinlichkeit für einfache Waisen ergibt sich:

(22) $$k_x = 1 - (q_x + o_x) = p_x - o_x$$

d. i. die Wahrscheinlichkeit, daß die x-jährige einfache Waise nach einem Jahre noch lebt, ohne Doppelwaise zu sein. Wir erhalten für die Barwerte:

(23) $$a^k_{x\,:\,\overline{16-x}|} = \frac{N^k_x - N^k_{16}}{D^k_x}$$

und als Rekursion:

(24) $$a^k_{x\,:\,\overline{16-x}|} = v \cdot k_x \; a^k_{x+1\,:\,\overline{16-x}|} + 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Der Barwert $a^k_{x\,:\,\overline{16-x}|}$ erhöht sich noch um die Anwartschaft der einfachen Waise auf Doppelwaisenrente.

Diese Anwartschaft berechnet sich wie folgt:

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Waise im unendlich kleinen Zeitraum $(x+n+t)$ bis $(x+n+t+dt)$ Doppelwaise wird, ist dargestellt durch

$$o_{x+n+t}\,dt$$

so daß

$$l^k_{x+n+t} \cdot o_{x+n+t}\,dt$$

die erwartete Zahl der Doppelwaisen darstellt. Dabei ist $\bar{o}_x$ die zu o_x gehörige Intensität der Doppelverwaisung.

Auf Jahresanfang diskontiert ergibt sich:

$$v^t\, l^k_{x+n+t}\, \bar{o}_{x+n+t}\,dt$$

Bei jeder Doppelverwaisung wird der Barwert der Doppelwaisenrente fällig, so daß wir als Jahresbelastung je einfache Waise erhalten:

$$\frac{1}{l^k_x} \int_0^1 l^k_{x+n+t}\, \bar{o}_{x+n+t}\, K^d_{x+n+t:\overline{16-(x+n+t)|}}\, v^t\,dt$$

und als Belastung für alle Jahre:

$$a^{kd}_{x:\overline{16-x|}} = \frac{1}{l^k_x} \sum_{n=o}^{15-x} v^n \int_0^1 l^k_{x+n+t} \cdot \bar{o}_{x+n+t}\, K^d_{x+n+t:\overline{16-(x+n+t)|}}\, v^t\,dt$$

nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung können wir schreiben:

(25) $$a^{kd}_{x:\overline{16-x|}}$$

$$= \frac{1}{l^k_x} \sum_{n=o}^{15-x} v^{n+\frac{1}{2}}\, K^d_{x+n+\frac{1}{2}:\overline{16-(x+n+\frac{1}{2})|}}\, l^k_{x+n} \int_0^1 {}_tp^k_{x+n}\, o_{x+n+t}\,dt$$

da aber

$$\int_0^1 {}_tp^k_{x+n}\, \bar{o}_{x+n+t}\,dt = o_{x+n}$$

so erhalten wir

$$a^{kd}_{x:\overline{16-x}|} = \frac{1}{l^k_x \, v^x} \sum_{n=0}^{15-x} l^k_{x+n} \cdot o_{x+n} K^d_{x+n:\overline{16-(x+n+\frac{1}{2})}|} \, v^{n+\frac{1}{2}} \, v^x$$

Bei Einführung der Kommutationswerte

$$D^{kd}_{x:\overline{16-x}|} = l^k_x \cdot o_x \, K^d_{x+\frac{1}{2}:\overline{16-(x+\frac{1}{2})}|} \cdot v^{x+\frac{1}{2}}$$

und

$$N^{kd}_{x:\overline{16-x}|} = \sum D^{kd}_{x:\overline{16-x}|}$$

wird

(26) $$a^{kd}_{x:\overline{16-x}|} = \frac{N^{kd}_{x:\overline{16-x}|}}{D^k_x}$$

Als Gesamtbarwert für die einfache Waisenrente ergibt sich damit:

(27) $$K_{x:\overline{16-x}|} = a^k_{x:\overline{16-x}|} + \frac{5}{3} a^{kd}_{x:\overline{16-x}|}$$

Im Falle der dauernden Erwerbsunfähigkeit des rentenberechtigten Kindes (Waise und Doppelwaise) sieht das Gesetz eine Verlängerung der Rentenberechtigung bis zum Alter 70 des Getöteten vor. Diese Fälle sind relativ selten und werden in praxi durch einen aus den Erfahrungen berechneten Zuschlag zu den Barwerten für Waisen und Doppelwaisenrenten berücksichtigt. Eine theoretisch genaue Einkalkulierung wurde hier daher unterlassen. Es sei noch beigefügt, daß auch die Möglichkeit der Doppelverwaisung praktisch nicht als direkte Anwartschaft in Rechnung gestellt wird, sondern auch in Form eines Zuschlages zur einfachen Waisenrente berücksichtigt wird.

d. Die laufende Ascendenten- und Geschwisterrente. Die Ascendenten- und Geschwisterrente hat den Charakter einer Verbindungsrente, deren Höhe von der Zusammensetzung der Personengruppe unabhängig ist. Sie läuft bis zum Ableben des letzten Gliedes der Gruppe, oder wenn minderjährige Geschwister die Ascendenten überleben, bis zum Zeitpunkt, wo das jüngste der Geschwister sein 16. Altersjahr zurückgelegt hat. (Verbindungsrente auf das längste Leben).

Als Ausscheideursachen haben wir also Tod für die Ascendenten und Erfüllung des 16. Altersjahrs für die Geschwister. Der Barwert der Rente wird allgemein dargestellt durch:

(28) $$V_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}$$

Für die Berechnung der allgemeinen Verbindungsrente auf das längste Leben gilt die Formel:

(29) $$a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = S_1 - S_2 + S_3 - + \cdots\cdots + (-1)^{m-1} S_m$$

wobei das Symbol

$$S_k = \sum_{\binom{m}{k}} a_{x_1 x_2 \ldots x_k}$$

die Summe der Verbindungsrenten auf kürzestes Leben für alle $\binom{m}{k}$ Kombinationen k^{ter} Klasse von m Elementen bedeutet.

Zur Herleitung und theoretischen Vereinfachung dieser Formel vergleiche das Kapitel über die Verbindungsrenten.

Die Auswertung der hier gegebenen Formel ist kompliziert, so daß bisher mangels einer theoretischen Vereinfachung praktisch unter den Ascendenten und Geschwistern eine geeignete Auswahl von zwei Personen getroffen wurde, für die man dann eine Verbindungsrente auf zweites Ableben berechnet. Wie aus dem Spezialkapitel über Verbindungsrenten ebenfalls hervorgeht, läßt sich die Berechnung dieser Rente für zwei Personen stark vereinfachen. In vielen Fällen wird demnach ein Teil der Verwandten vernachlässigt, womit natürlich ein Fehler in der Barwertbestimmung mitbedingt ist.

Daran knüpfen sich die zwei Aufgaben:

1. Versuch einer theoretischen oder praktischen Vereinfachung der Berechnung der Verbindungsrenten auf das längste Leben.

2. Abschätzung des Fehlers, den die Barwerte erleiden durch die „vernachlässigten Verwandten".

3. Der Rentenkomplex.

Der Rentenkomplex setzt sich zusammen aus:

a. der Familienrente,

b. den aufgeschobenen Witwen-, Kinder-, Ascendenten- und Geschwisterrenten.

a. Die Familienrente:

Sie ist eine gewöhnliche Zeitrente von der Struktur:

$$(30)\qquad \overset{(12)}{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{12} + v^{\frac{1}{12}}\frac{1}{12} + v^{\frac{2}{12}}\frac{1}{12} + \cdots + v^{\frac{n-1}{12}}\frac{1}{12} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1-v^{n}}{1-v^{\frac{1}{12}}}$$

Die Dauer n ist abhängig vom Alter z des maßgebenden Kindes. Für ein maßgebendes Kind vom Alter z ist die künftige Dauer der Zeitrente im Mittel $n = 16 - (z + {}^1/_2)$ Jahre, da wir allgemein eine Person vom x bis $x+1$ Geburtstag als x jährig betrachten. Damit erhalten wir als Barwert der Familienrente

$$(31)\qquad F_z = \frac{1}{12}\,\frac{1 - v^{16-\left(z+\frac{1}{2}\right)}}{1 - v^{\frac{1}{12}}}$$

setzen wir

$$\frac{1}{12}\,\frac{1}{1-v^{\frac{1}{12}}} = C_v$$

so erhalten wir:

$$(32)\qquad F_z = C_v\left(1 - v^{16-\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

Zur Herstellung von Tabellen ergibt sich die Rekursion:

$$\frac{F_z}{F_{z+1}} = \frac{1 - v^{16-\left(z+\frac{1}{2}\right)}}{1 - v^{16-\left(z+\frac{3}{2}\right)}}$$

also

(33) $$F_z = F_{z+1}\left[\frac{1 - v^{16-\left(z+\frac{1}{2}\right)}}{1 - v^{16-\left(z+\frac{3}{2}\right)}}\right]$$

Für die Zeitdauer der Familienrente wird also die Sterblichkeit der Hinterbliebenen und die Wiederverheiratung der Witwe vernachlässigt. Die Abschätzung des dadurch entstehenden Fehlers in der Barwertbestimmung wird Aufgabe eines Spezialabschnittes sein.

b. Die aufgeschobenen Renten.

Die aufgeschobenen Renten beginnen in dem Zeitpunkte, wo das maßgebende Kind aus dem Rentengenuß ausscheidet. Als mittlere Aufschubzeit m erhalten wir demnach:

(34) $$m = 16 - \left(z + \frac{1}{2}\right)$$

Die aufgeschobene Witwenrente.

Nach (12) erhalten wir ohne weiteres:

(35) $${}_{m|}W_y = v^m_m w_y W_{y+m}$$

die aufgeschobene Kinderrente.

Wir verwenden die Rekursion (13):

(13) $${}_{m|}a_{x:\overline{n}|} = v^m_m p_x a_{x+m:\overline{n}|}$$

Es ergeben sich die Substitutionen:

Alter des rentenerwartenden Kindes sei $x + {}^1/_2$

Alter des maßgebenden Kindes sei $z + {}^1/_2$

Aufschubzeit $m = 16 - (z + {}^1/_2)$

Dauer $n = z - x$

Zur Kontrolle:

Jetziges Alter + Wartefrist + Laufzeit = Alter bei Sistierung

$$x + \frac{1}{2} + 16 - \left(z + \frac{1}{2}\right) + z - x = 16$$

An Stelle von (13) erhalten wir somit für

die aufgeschobene Doppelwaisenrente:

(36) $$ {}_{16-\left(z+\frac{1}{2}\right)|}K^{d}_{x+\frac{1}{2}:\overline{z-x}} = v^{16-\left(z+\frac{1}{2}\right)}\, {}_{16-\left(z+\frac{1}{2}\right)}p_{x+\frac{1}{2}}\, K^{d}_{16+x-z:\overline{z-x}|} $$

die aufgeschobene einfache Waisenrente:

(37) $$ {}_{16-\left(z+\frac{1}{2}\right)|}K_{x+\frac{1}{2}:\overline{z-x}} = v^{16-\left(z+\frac{1}{2}\right)}\, {}_{16-\left(z+\frac{1}{2}\right)}k_{x+\frac{1}{2}}\, K_{16+x-z:\overline{z-x}|} $$

Die aufgeschobene Verbindungsrente:

Auch hier werden praktisch nur zwei Leben berücksichtigt. Für diesen Fall erhalten wir:

(38) $$ {}_{m|}a_{\overline{x_1 x_2}} = {}_{m|}a_{x_1} + {}_{m|}a_{x_2} - {}_{m|}a_{x_1 x_2} $$

wobei wiederum $m = 16 - (z + {}^1/_2)$ zu setzen ist.

Zur Erläuterung der Anwendung des entwickelten Berechnungssystems lassen wir ein Beispiel folgen.

Beispiel: Besoldung des Getöteten 3000 Fr.

Hinterlassene	Alter	Gesetzlicher Anspruch	Erste Rentenfestsetzung	Erstmaliges Deckungskapital
1. Witwe	40	30%	${}_{10}W_{40}$	${}_{10}W_{40}$ 7,53.900 · 6.777
1. Kind	12	15%		
2. Kind	10	15%		F_6=7,94.1800=14.292
3. Kind	8	15%	F_6	
4. Kind	6	15%		
Vater	65	20%	${}_{10}V_{60}$	${}_{10}V_{60}$ 5,29.600 · 3.174
Mutter	60			
				Total: 24.243

Als maßgebendes Kind gilt das vierte, denn mit seinem Ausscheiden werden alle Renten ungekürzt sein; d. f. $z = 6$

Die aufgeschobenen Renten, die mit diesem Berechnungssystem zwangsläufig verbunden sind, verlangen eine doppelte Abstufung der Rentenbarwerte. Daher besteht das Bedürfnis, an Stelle dieses Systems ein anderes zu setzen, das diese aufgeschobenen Renten nicht mehr enthält.

Zusammenfassend stellen sich folgende Aufgaben und Probleme:

1. Nachprüfung der Rechnungsgrundlagen.
2. Bestimmung des Fehlers, den die Berechnungen nach den getroffenen Voraussetzungen und Vereinfachungen aufweisen gegenüber der Theorie.
3. Prüfung der Möglichkeiten einer anderen Zerlegung des Komplexes zur einfacheren Berechnung der Deckungskapitalien.
4. Es ist zu untersuchen, ob bei diesem Komplex aus dem Rentenbestande des Vorjahres Schlüsse möglich sind auf den Bestand des nächsten Jahres.
5. Versuch einer theoretischen oder praktischen Vereinfachung zur Berechnung der Verbindungsrenten auf das längste Leben.
6. Entwicklung des Komplexes bis zum Beharrungszustand.

2. Kapitel.

Die statistischen Grundlagen.

I. Die Sterblichkeit der Witwen.

Als Grundlage für die Berechnungen verwendet die Suva die Absterbeordnung der holländischen Reichsversicherungsgesellschaft 1900—09.

Die Nachprüfung der Witwensterblichkeit nach den neuesten

Beobachtungen der Zeitperiode vom 1. April 1918 bis zum 1. April 1933 ergibt eine gute Bestätigung der verwendeten Rechnungsgrundlage.

Der Zahl von 322 erwarteten Todesfällen stehen 328 eingetretene gegenüber. Dies entspricht einem Verhältnis der erwarteten zu den eingetretenen Ereignissen von 102 %.

Der Vergleich mit der schweizerischen Absterbeordnung 1920-1921 für Frauen zeigt, daß die Sterblichkeit der weiblichen Gesamtbevölkerung für diese Zeitperiode um ca. 7 % größer ist, als die bei den Suvawitwen beobachtete Sterblichkeit.

Die Sterblichkeit der Witwen, Kinder und Ascendenten in der Militärversicherung zeigt keine in Betracht fallende Abweichung von derjenigen der schweizerischen Bevölkerung im allgemeinen, so daß diese Sterbetafel für die Militärversicherung beibehalten werden kann.

II. Untersuchungen über die Wiederverheiratung der Witwen.

A. Einleitung.

Als Rechnungsgrundlage verwendet die Suva die Grundzahlen der holländischen Reichsversicherungsgesellschaft 1900—09 mit einer einfachen Abstufung nach dem Alter der Witwe. Eine Witwe gilt als x-jährig vom x bis zum $(x + 1)$ Geburtstag.

Die ganze Untersuchung umfaßt die Zeit vom 1. April 1918 bis 1. April 1933, also 15 volle Rentenjahrgänge mit insgesamt 24 338 beobachteten Witwenjahren und 465 eingetretenen Wiederverheiratungen. Im Vergleich zur letzten statistischen Nachprüfung auf den 31. Dezember 1927 mit 10 088 beobachteten Witwenjahren und 229 eingetretenen Wiederverheiratungen hat sich demnach der Umfang des Beobachtungsmaterials mehr als verdoppelt, so daß wir erwarten dürfen, daß sich zufällige Extremwerte jener Beobachtungsperiode etwas ausgeglichen haben. Wir werden demnach Resultate erhalten, die sicher bestimmte Feststellungen zulassen.

B. Vergleich der Erfahrungen mit bestehenden Tabellen.

1. Holländische Reichsversicherungsanstalt 1900/09.

Zur Beurteilung der Rechnungsgrundlage in ihrer Gesamtheit stellen wir fest, daß im ganzen ca. 13 % weniger Verheiratungen eingetreten sind als nach der Grundlage erwartet wurde, indem 536 erwarteten Ereignissen nur 465 eingetretene gegenüberstehen. Dieses Bild ändert sich aber sofort, wenn wir das erste Rentenbezugsjahr, das naturgemäß sehr arm ist an Wiederverheiratungen, von der Beobachtung ausschließen. Wir finden so, daß 108,3 % der erwarteten Wiederverheiratungen eingetreten sind. Da bei den Jahresbilanzen verhältnismäßig sehr wenig Renten im ersten Bezugsjahre stehen, fällt den abnormalen Verhältnissen im ersten Witwenjahre in den Barwerten nur ein geringes Gewicht zu, so daß ihre Vernachlässigung gerechtfertigt erscheint. Wir dürfen daher die Brauchbarkeit der holländischen Werte für die Wiederverheiratung im Gesamten auch für die Zukunft anerkennen.

Ein Vergleich der neuesten Resultate mit den Beobachtungen in der Periode vom 1. April 1918 bis 31. Dezember 1927 zeigt sowohl für alle Rentenbezugsjahre, als auch mit Ausschluß des ersten Rentenbezugsjahres im allgemeinen eine bessere Anpassung der heutigen Zahlwerte an die Grundlagen. Dem Eintritt von 108,3 % der erwarteten Wiederverheiratungen stehen 117,6 % in der früheren Periode gegenüber, was einem Rückgang von 9,3 % entspricht. Für die letzten Beobachtungsjahre vom 1. Januar 1928 bis 1. April 1933 stellt sich das Verhältnis auf 100,9%, ist also sehr befriedigend.

2. Allgemeine schweizerische Bevölkerung 1901/10.

Wir stellen fest, daß die Zahl der 465 eingetretenen Wiederverehelichungen stark abweicht von den aus den allgemeinen Beobachtungen der schweizerischen Bevölkerung 1901/10 von Grieshaber abgeleiteten Größen. Es hätten nach diesen Beobachtungen 777 Wiederverehelichungen eintreten sollen, es sind aber prozentual auf 100 erwartete Ereignisse nur 60 eingetreten. Bei Ausschluß des ersten Rentenbezugsjahres erkennen wir auch hier eine

bessere Uebereinstimmung, indem sich dieses Verhältnis bei 594 erwarteten und 441 eingetretenen Wiederverheiratungen auf 74 % stellt.

3. Erfahrungen der Militärversicherung.

Vergleichen wir die Erfahrungen der Militärversicherung mit den Grundlagen der Suva, so stellen wir fest, daß für die gesamte Beobachtung die Zahl der eingetretenen Wiederverheiratungen um 8 % unter der Erwartung bleibt. Den Ausschlag für dieses Ergebnis gibt das erste Witwenjahr, das auch bei der Militärversicherung naturgemäß sehr arm an Wiederverheiratungen ist. Wird das erste Jahr außer Beobachtung gelassen, so sind 107,7 % der erwarteten Wiederverheiratungen eingetreten. Wir dürfen daher behaupten, daß sich die Grundlagen der Suva auch für die Militärversicherung gut eignen.

C. Untersuchung der Spezialfragen.

1. Die Untersuchungsmethode.

Aus unseren statistischen Erhebungen ergeben sich für die Abhängigkeit der Wiederverheiratung von Alter, Dauer der Witwenschaft und Zahl der rentenberechtigten Kinder schon gewisse Tendenzen. Diese Tendenzen dürfen wir aber erst als gesetzmäßig betrachten, wenn sie für die Suvawitwen allgemein gültig sind. Es ist unsere Aufgabe, diese an einem Durchschnittsbestande festgestellten Tendenzen auch an Extrembeständen zu verfolgen. Damit erkennen wir die Einwirkung der Strukturänderung auf die Zahl der erwarteten Wiederverheiratungen.

a. Ermittlung der Wiederverheiratungswahrscheinlichkeiten.

Haben wir die Zahl der beobachteten Witwenjahre und die eingetretenen Wiederverheiratungen statistisch festgestellt, so lassen sich hieraus ohne weiteres die Wiederverheiratungswahrscheinlichkeiten ableiten.

$$W = \frac{\text{Eingetretene Wiederverheiratungen}}{\text{Anzahl der beobachteten Witwenjahre}}$$

Entsprechend den interessierenden Unterscheidungsmerkmalen haben wir gebildet:
Wiederverheiratungswahrscheinlichkeit der Witwen

α. abgestuft nach Alter und Dauer der Witwenschaft,

β. abgestuft nach Alter und Anzahl rentenberechtigter Kinder.

b. Ermittlung der erwarteten Wiederverehelichungen bei Annahme irgend eines Bestandes.

Durch Ausmultiplikation der eben abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten mit der Zahl der beobachteten Witwenjahre irgend eines Bestandes läßt sich leicht die Zahl der erwarteten Wiederverheiratungen des betreffenden Bestandes ermitteln.

c. Gegenüberstellung zweier Extrembestände.

Um die Einwirkung der Strukturänderung eines Bestandes auf die Zahl der erwarteten Wiederverheiratungen zu erkennen, haben wir folgende Extrembestände einander gegenübergestellt.

α. Strukturänderung in Alterszusammensetzung und Dauer der Witwenschaft:

1. Witwenbestand des ersten Rentenbezugsjahres,
2. Witwenbestand der Periode vom 1. April 1918—31. Dezember 1932.

β. Strukturänderung in Alterszusammensetzung und Zahl rentenberechtigter Kinder:

1. Gesamtwitwenbestand am 1. April 1933,
2. Bestand der kinderlosen Witwen,
3. Bestand der Witwen mit 4 und mehr Kindern.

2. Die Abhängigkeit der Wiederverheiratung.

Die nach der dargelegten Methode durchgeführte Untersuchung hat die festgestellten Tendenzen auf der ganzen Linie bestätigt. Daraus dürfen wir nun schließen, daß diese Tendenzen, abgesehen von Zufälligkeiten, gesetzmäßig sind. Wir wollen daher die Resultate kurz zusammenstellen und festhalten.

a. Abhängigkeit der Wiederverheiratung vom Alter.

Die Unterteilung nach Altersgruppen zeigt in den jungen Witwenjahren, speziell in der Altersgruppe 20—29 eine deutliche Ueberwiederverheiratung gegenüber den Grundlagen, die dann in den mittleren Altersgruppen, die eine Unterwiederverheiratung aufweisen, wieder wett gemacht wird. Für hohe Alter ist die Uebereinstimmung mit den Grundlagen innerhalb der Altersgruppen befriedigend.

b. Abhängigkeit von der Dauer der Witwenschaft.

Wir finden hier bisherige Feststellungen bestätigt. Das erste Rentenbezugsjahr verhält sich vollständig anormal, indem nur sehr wenig Wiederverheiratungen stattfinden. Im zweiten und speziell im dritten Jahre der Witwenschaft zeigt sich dann eine starke Häufung der Wiederverehelichungen. Im Vergleich zu 100 Wiederverheiratungen im ersten Rentenbezugsjahre zeigt sich für ganz verschiedene Bestände ein Emporschnellen auf den mehr als sechsfachen Betrag im zweiten Bezugsjahr. Im dritten Jahre finden wir mit ca. 800 Fällen das Maximum der Wiederverheiratung. Für das vierte und fünfte Jahr zeigt sich wieder ein Abfall der Wiederverheiratung in die Grenzen zwischen 550 und 600 Ereignissen, was ziemlich genau der erwarteten Anzahl entspricht. Die übrigen Bezugsjahre weisen noch 400—460 Fälle auf und bleiben ständig unter der Erwartung.

Ein Vergleich mit früheren Beobachtungen zeigt eine Verschiebung der größten Häufung vom zweiten auf das dritte Rentenbezugsjahr.

c. Abhängigkeit von der Zahl rentenberechtigter Kinder.

Wir konstatieren, daß die kinderlosen Witwen, mit Ausnahme der jüngsten und höchsten Alter, gegenüber den übrigen Witwen eine viel stärkere Wiederverheiratung aufweisen. Bei den kinderlosen Witwen sind 116 % der erwarteten Wiederverheiratungen eingetreten, wogegen für die übrigen Witwen die eingetretenen Fälle durchwegs unter der Erwartung bleiben. Die mittleren Altersklassen sind dabei alle ungefähr gleich stark beteiligt.

In der Reihe folgen die Witwen mit vier und mehr Kindern mit einem Verhältnis von 91,3 %, wobei die Altersgruppen 25—34 speziell bevorzugt sind und starke Ueberverheiratung aufweisen.

Bei den Witwen mit drei und einem Kind, deren Wiederverheiratung mit ca. 20 % unter der Erwartung steht, zeigt sich eine Bevorzugung der Altersgruppe 25—29.

Die geringste Wiederverehelichung, mit einem Verhältnis von 71,9 %, weisen die Witwen mit zwei Kindern auf, wobei die Altersgruppe 20—24 eine starke Ueberwiederverheiratung zeigt.

3. Die Wiederverehelichung bei Familienrente im Vergleich zu allen Renten.

Für die Wiederverehelichungen, die während der Dauer der Familienrente stattfinden, haben die Erhebungen in den großen Richtlinien gegenüber den Gesamtbeobachtungen keine Neuerscheinungen gezeigt.

Wir stellen auch hier eine Abnormalität des ersten Rentenbezugsjahres fest, die diejenige der Gesamtheit allerdings noch um 4,8 % übersteigt. Das zweite und das dritte Bezugsjahr weisen Häufungen der Wiederverehelichung auf mit einem Maximum im dritten Jahre. In Bezug auf die Abhängigkeit vom Alter stellen wir auch hier eine starke Ueberwiederverheiratung der Altersgruppe 20—29 fest.

Die Wiederverehelichung nimmt demnach während der Dauer der Familienrente denselben Verlauf wie für die gesamte Witwenschaft.

3. Kapitel.

Fehlerbestimmung.

I. Einleitung.

In diesem Kapitel sollen die Fehler besprochen werden, die die Berechnungen nach den getroffenen Voraussetzungen und Vereinfachungen aufweisen gegenüber der Theorie.

Wir wollen unterscheiden zwischen zwei Hauptfehlergruppen, nämlich zwischen den Fehlern, die das Berechnungssystem an sich enthält und denjenigen Fehlern, die infolge Näherungen und Annahmen bei der Berechnung der Barwerte entstehen.

Wir erhalten damit folgende kurze Uebersicht für die vorhandenen Fehlerquellen.

I. Fehler, herrührend vom Berechnungssystem.
   1. Möglichkeit einer Verkürzung der Dauer der Familienrente bei Berücksichtigung der Sterblichkeit und der Wiederverheiratung.

II. Fehler infolge Näherungen und Annahmen bei der Berechnung der Barwerte.
   1. Witwenrenten: Annahme $h_{60} = 0$
   2. Kinderrenten: Verwendung der Barwerte einfacher Waisenrenten auch für Doppelwaisenrenten.
   3. Verbindungsrenten: Einfluß der vernachlässigten Verwandten.

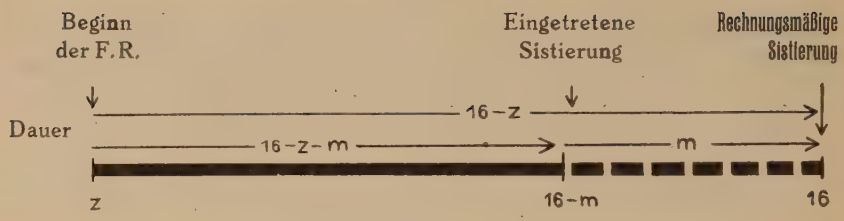
II. Fehler herrührend vom Berechnungssystem.

1. Einleitung.

Die Familienrente ist eine Zeitrente, deren Dauer nur abhängig ist vom Alter z des maßgebenden Kindes. Für die Zeitdauer der Familienrente wird also die Sterblichkeit der Hinterbliebenen und die Wiederverheiratung der Witwen vernachlässigt. Die Auflösung der Familienrente und deren Ersatz durch laufende Renten kann aber infolge Tod der Hinterbliebenen und Wiederverheiratung der Witwe eintreten bevor das maßgebende Kind durch Erfüllung des 16. Altersjahres in regulärer Weise dazu Anlaß gibt.

Wir stellen uns hier die Aufgabe, den dadurch entstehenden Fehler in der Bestimmung der Barwerte und der Deckungskapitalien festzustellen.

Eine frühzeitige Auflösung der Familienrente verkürzt ihre Dauer, so daß unsere Barwerte etwas zu hoch erscheinen.



Alter des maßgebenden Kindes.

Zur Abschätzung des Fehlers wollen wir folgende Betrachtung durchführen:

Für ein maßgebendes Kind des Alters z tritt die Sistierung der Familienrente rechnungsmäßig nach (16 — z) Jahren ein. Während dieser Zeit beträgt die Höhe des Rentenbezuges stets 60 % der versicherten, jährlichen Lohnsumme.

Findet die Auflösung anstatt nach (16 — z) nach [16 — (z + m)] Jahren, also im Alter (16 — m) des maßgebenden Kindes statt, so tritt eine Herabsetzung der entschädigten Lohnprozente ein, die wir allgemein mit p bezeichnen.

Während m Jahren werden also nur noch (60 — p) % ausgerichtet, wogegen anfänglich 60 % in Rechnung gestellt wurden. Für jedes der m Jahre bis zur rechnungsmäßigen Sistierung der Familienrente im Alter 16 des maßgebenden Kindes entsteht somit ein Fehler von p %. Es wird also zweckmäßig sein, um nicht nur die Anzahl der Fehler, sondern zugleich auch ihr Gewicht einzubeziehen, wenn wir für unsere weiteren Betrachtungen nicht die Familienrente, sondern das entschädigte Lohnprozent bei Familienrente als Einheit wählen.

Mathematisch läßt sich dieser Fehler genau erfassen und in seiner Auswirkung auf Barwert und Deckungskapital beurteilen, wenn wir für jedes Familienrentenlohnprozent eine Anwartschaft auf Fehler berechnen, die dann vermindernd wirkt auf den Barwert.

Wir geben im folgenden zuerst die mathematische Formulierung und gehen nachher über zur Berechnung der sich aus der Theorie ergebenden Größen und Beziehungen.

2. Berechnung der Anwartschaft eines Familienrentenprozentes auf Fehler.

Wir bezeichnen mit w_z die Wahrscheinlichkeit, daß ein Familienrentenprozent, lautend auf das Alter z des maßgebenden Kindes, nach einem Jahre nicht mehr als Rente ausgerichtet wird (Fehlerwahrscheinlichkeit); $\overline{w}$ sei die zugehörige Intensität.

Die Wahrscheinlichkeit, daß f_z Familienrentenprozente im unendlich kleinen Zeitraum $(z+n+t)$ bis $(z+n+t+dt)$ nicht mehr ausgerichtet werden, wird dann ausgedrückt durch

$$f_{z+n+t}\, w_{z+n+t}\, dt$$

oder auf Jahresanfang diskontiert

$$v^t f_{z+n+t}\, \overline{w}_{z+n+t}\, dt$$

Bei jeder Sistierung eines Familienrentenprozentes wird der Barwert einer Zeitrente (Fehlerrente) fällig, der identisch ist mit dem Barwert einer Familienrente, da diese ebenfalls eine Zeitrente ist.

Die auf ein Familienrentenprozent des maßgebenden Kindesalters z im n^{ten} Laufjahre durch Fehlerrente entstehende Belastung auf Jahresanfang diskontiert stellt sich somit auf

$$\frac{1}{f_z} \int_0^1 f_{z+n+t}\, w_{z+n+t}\, F_{z+n+t}\, v^t\, dt$$

Der Barwert der Gesamtbelastung für alle n Jahre diskontiert auf das Alter z des maßgebenden Kindes wird somit dargestellt durch:

$$\mathfrak{F}_z = \frac{1}{f_z} \sum_{n=0}^{15-z} v^n \int_0^1 f_{z+n+t}\, w_{z+n+t}\, F_{z+n+t}\, v^t\, dt$$

Bei Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung dürfen wir schreiben

$$\mathfrak{F}_z = \frac{1}{f_z} \sum_{n=0}^{15-z} v^{n+\frac{1}{2}} F_{z+n+\frac{1}{2}} f_{z+n} \int_0^1 \frac{f_{z+n+t}}{f_{z+n}} \overline{w}_{z+n+t} \, dt$$

da aber

$$\int_0^1 \frac{f_{z+n+t}}{f_{z+n}} \overline{w}_{z+n+t} \, dt = w_{z+n}$$

erhalten wir:

$$\mathfrak{F}_z = \frac{1}{f_z} \sum_{n=0}^{15-z} f_{z+n} w_{z+n} F_{z+n+\frac{1}{2}} v^{n+\frac{1}{2}}$$

oder mit v^z erweitert und in gekürzter Schreibweise

$$\mathfrak{F}_z = \frac{1}{f_z v^z} \sum_{z}^{15} f_z w_z F_{z+\frac{1}{2}} v^{z+\frac{1}{2}}$$

oder

$$\mathfrak{F}_z = \frac{1}{D_z^f} \sum_{z}^{15} f_z \cdot w_z F_{z+\frac{1}{2}} v^{z+\frac{1}{2}} = \frac{N_z^F}{D_z^f}$$

wobei:

$$D_z^f = f_z \cdot v^z \; ; \; N_z^F = \sum f_z \cdot w_z F_{z+\frac{1}{2}} v^{z+\frac{1}{2}}$$

3. Zahlenmäßige Auswertung der Anwartschaft.

Nach unserer Schlußformel zur Berechnung der Anwartschaft benötigen wir im wesentlichen zwei neue Größen:

a. Die Fehlerwahrscheinlichkeit w_z

b. Die Ordnung der Familienrenten f_z

Damit können wir ohne Schwierigkeit die definierten Kommutationszahlen D_z^f, D_z^F und N_z^F bestimmen.

a. Die Fehlerwahrscheinlichkeit w_z

Vorerst scheint eine doppelte Abstufung nach dem Eintrittsalter und dem laufenden Alter des maßgebenden Kindes notwendig. Die nähere Untersuchung der Berechnungsergebnisse gestattet aber eine Zusammenfassung derart, daß nur noch eine einfache Abstufung nach dem Alter z des maßgebenden Kindes resultiert. Die Wahrscheinlichkeit w_z zeigt ausgesprochene Tendenz der Zunahme mit dem Alter. Wir haben die Werte für unsere Zwecke linear ausgeglichen durch die Gerade:

$$y = m x + d$$

wobei sich die Konstanten ergaben zu:

$$m = 12;\ d = 9$$

b. Die Ordnung der Familienrenten f_z

Mit Hilfe der Fehlerwahrscheinlichkeit läßt sich die Ordnung ohne weiteres konstruieren mit der allgemeinen Beziehung:

$$f_{z+1} = f_z (1 - w_z)$$

4. Einfluß des Fehlers auf die Barwerte.

Als „fehlerfreien" Barwert F_z' erhalten wir auf Grund unserer mathematischen Erörterung:

$$F_z' = F_z - \mathfrak{F}_z$$

$\mathfrak{F}_z$ bewegt sich in den Grenzen 0,53 und 0,01 oder in Prozenten des normalen Barwertes F_z ergibt dies die Grenzen von 4,6 % und 0,8 % (relativer Fehler!)

5. Einfluß auf die Deckungskapitalien.

a. Erstmalige Belastung:

Der relative Fehler des Eintrittsbestandes beträgt im Mittel für Betriebs- und Nichtbetriebsunfälle 4,1 %. Die Familienrenten eines Eintrittsbestandes machen für Betriebsunfälle 30 % und für Nichtbetriebsunfälle 25 % der Gesamtbelastung durch Hinterlassenenrenten aus, so daß der Fehler in der Gesamtbelastung sich auf 1,2 % für die Betriebsunfälle und 1,0 % für Nichtbetriebsunfälle stellt.

b. Jahresbilanz 1932.

Wie zu erwarten ist, wird der relative Fehler in der Bilanz kleiner, er beträgt für Betriebsunfälle 3,7 % und für Nichtbetriebsunfälle 3,8 %.

In der Bilanz machen die Familienrenten für Betriebsunfälle 16,8 % und für Nichtbetriebsunfälle 15,9 % der Gesamtbelastung aus. Der relative Fehler in der Gesamtbelastung der Bilanz beträgt somit 0,6 % für Betriebsunfälle und 0,6 % für Nichtbetriebsunfälle.

c. Beharrungszustand.

Der relative Fehler im Beharrungszustand kann gleich gesetzt werden dem relativen Fehler in der Bilanz 1932, da die Familienrenten in der Bilanz 1932 nahezu ihren Beharrungszustand erreicht haben. Mit dem Wert 3,7 % für Betriebsunfälle werden wir somit der Wirklichkeit sehr nahe sein.

Im Beharrungszustand machen die Familienrenten für die Betriebsunfallversicherung noch 11,3 % der Gesamtbelastung aus. Der relative Fehler in der Gesamtbelastung des Beharrungszustandes beträgt somit für die Betriebsunfallversicherung 0,4 %.

III. Fehler infolge Näherungen und Annahmen bei der Berechnung der Barwerte.

Die Fehlerquellen dieses Abschnittes haben für uns nur sekundäre Bedeutung, da sie im wesentlichen durch rechnerische Vereinfachungen entstehen. Wir verzichten daher auf eine genaue Er-

mittlung der Größe der Fehler und geben nur eine approximative Beurteilung ihres Einflusses auf die Gesamtbelastung.

1. Witwenrenten.

Bei der Aufstellung der Rechnungsgrundlagen wurde angenommen, die Wiederverheiratungswahrscheinlichkeit für Witwen des Alters 60 und mehr sei Null. Diese Annahme scheint ohne weiteres gerechtfertigt, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß unter den 465 eingetretenen Wiederverheiratungen der bisherigen 15jährigen Beobachtungsperiode nur zwei Fälle aufgetreten sind, wo die Witwe das Alter 60 überschritten hatte.

2. Kinderrenten.

Zur rechnerischen Vereinfachung werden für die Doppelwaisenrenten dieselben Barwerte verwendet, wie für die einfachen Waisenrenten.

Auch diese Vereinfachung hat nur ganz geringen Einfluß auf die Gesamtbelastung, da die Doppelwaisenrenten relativ selten auftreten. In der Bilanz fallen nur 0,6 % der Gesamtbelastung auf Doppelwaisenrenten. Zudem zeigt ein Vergleich der Barwerte für einfache Waisenrenten und derjenigen für Doppelwaisenrenten nur eine geringe Abweichung von durchschnittlich 2,3 %. In der Gesamtbelastung dürfen wir somit schätzungsweise einen Fehler von ca. 0,14 $^0/_{00}$ annehmen.

3. Verbindungsrenten.

Zur Berechnung der Verbindungsrenten wird aus dem ganzen Rentenkomplex eine Auslese von nur zwei Personen getroffen. Die übrigen Verwandten werden in der Rechnung vernachlässigt. Da die vernachlässigten Verwandten sich in der Regel aus hohen Altern rekrutieren und daher meistens nur für kurze Zeit im Rentengenuß sind, kann die rechnerische Auswirkung dieser vereinfachenden Annahme keine große sein. Wir verzichten hier auf eine genauere Erörterung. Hingegen bietet das Problem ein gewisses theoretisches Interesse, weshalb wir in dem Spezialkapitel über die Verbindungsrenten diese Frage noch einmal berühren werden.

IV. Schlußbemerkung.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß das Berechnungssystem, wie es gehandhabt wird, eine für die Praxis durchaus genügende Genauigkeit aufweist, so daß eine Aenderung des Systems aus diesen Erwägungen heraus nicht in Frage kommt.

4. Kapitel.

Beharrungszustand.

I. Einleitung.

Eine Untersuchung über die Entwicklung des Rentenbestandes bis zum Beharrungszustand wird Aufschluß geben über die Aenderung in den Belastungsverhältnissen und die Bedeutung der beim jetzigen Berechnungssystem auftretenden gekürzten Renten im Beharrungszustand. Die Untersuchung gibt Gelegenheit, einen andern Ausgangspunkt als bei solchen Untersuchungen üblich, zu wählen, indem nicht von den versicherten Personen, sondern von einem Bestand an Rentenbezügern ausgegangen wird, wie er von den Hinterlassenen der tödlich Verunfallten gebildet wird.

II. Theoretischer Aufbau.

A. Allgemeine Darstellung.

Im Heft 21 der M. V. V. hat Prof. Chr. Moser eine allgemeine Darstellung des Beharrungszustandes für eine offene, sich erneuernde Gesamtheit gegeben, aus der wir die Grundgleichung für die theoretische Darstellung unserer Entwicklung entnehmen.

$$(1) \qquad H(t) \cdot Y(t) = H(t) \cdot y(t) + \int_0^t H(\tau)\, \varphi(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

Dabei bedeuten:

$H(t)$ Bestand der offenen Gesamtheit zur Zeit t.

$Y(t)$ Vorgangsfunktion in der offenen, sich erneuernden Gesamtheit.

$y(t)$ Entsprechender Vorgang in der geschlossenen Gesamtheit.

$\varphi(t)$ Erneuerungsfunktion der offenen, sich erneuernden Gesamtheit.

$H(t)\ \varphi(t)$ Erneuerungszahl.

Um den Vorgang $Y(t)$ selbst bestimmen zu können, muß noch entweder die Entwicklung des Bestandes $H(t)$ oder aber der Verlauf der Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ bekannt sein. Es ist ohne weiteres einzusehen, daß $H(t)$ und $\varphi(t)$ selbst in einer Wechselbeziehung stehen.

In den meisten Untersuchungen wird für die künftige Entwicklung des Versichertenbestandes eine den Verhältnissen angepaßte Annahme getroffen. Danach kann dann die Erneuerung schrittweise bestimmt und schließlich die Entwicklung des Vorganges $Y(t)$ von Jahr zu Jahr rechnerisch verfolgt werden.

Unsere Untersuchungen weichen von dieser allgemeinen Betrachtungsweise etwas ab. Als Versichertenbestand im Sinne der Moser'schen Ableitungen hätten wir die Anzahl Personen der der Unfallversicherung unterstellten Betriebe zu betrachten. Als Ausscheideursache gilt das Unfallereignis und zwar für die Hinterlassenenversicherung speziell das Unfallereignis mit tödlichem Ausgang. Aus der Wahrscheinlichkeit, tödlich zu verunfallen, müßte die Erneuerungsfunktion bestimmt werden. Als versicherbare Vorgänge wären zu betrachten, das Entstehen von rentenberechtigten Witwen, Kindern und Ascendenten.

Da die Unfallhäufigkeit nicht nach dem Alter abgestuft werden kann, sondern vielmehr lediglich eine Funktion des Berufes ist, stößt diese Betrachtungsweise auf Schwierigkeiten und setzt Annahmen voraus, deren praktische Durchführung zu keinem Ziele führt. Zudem ist die statistische Erfassung des Versichertenbestandes, dessen Entwicklung sehr vielseitig beeinflußt wird, unmöglich, so daß die Bestimmung der Erneuerungsfunktion praktisch undurchführbar wird.

Wir gehen daher bei unseren Untersuchungen nicht von den versicherten Personen aus, sondern direkt vom Bestande der Rentenbezüger, der sich aus den Hinterlassenen der tödlich Verunfallten zusammensetzt.

B. Entwicklung des Rentnerbestandes.

Wollen wir die Entwicklung unseres Rentnerbestandes in der Zukunft betrachten, so müssen wir die Ausscheideursachen und die Erneuerungszahl der Rentner kennen.

Wir bezeichnen allgemein die Wahrscheinlichkeit eines bei seinem Eintritt z-jährigen, nach t Jahren dem Bestande der Rentner noch anzugehören, mit $w_z(t)$.

Sind in einem gewissen Zeitpunkte (τ) zusammen $H(\tau)\ \varphi(\tau)$ Personen des Alters z in einem Bestand eingetreten, dann gehören zur Zeit t, also nach Ablauf von $(t-\tau)$ Jahren noch

$$H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot w_z(t-\tau)$$

Mitglieder dieser Generation dem Bestande an.

Bezeichnen wir den Zeitpunkt, in dem die Betrachtung des Bestandes ($H(t)$) beginnt mit 0, dann setzt sich in irgend einem späteren Beobachtungsmoment (t) der Gesamtbestand der offenen Rentnergesamtheit zusammen aus den Rentnern aller früheren Zugänge, die der Gesamtheit noch angehören.

Werden zunächst sowohl das Ausscheiden, als auch die Bestandeserneuerung als kontinuierlicher Vorgang gedacht, so setzt sich zur Zeit (t) der Gesamtbestand zusammen aus:

$$(2) \qquad H(t) = \int_0^t H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot w_z(t-\tau)\, d\tau$$

Erfolgen die Eintritte nicht nur in einem bestimmten Alter z, sondern in verschiedenen Einzelaltern, dann müssen wir noch eine Verteilungsfunktion v_z der Eintritte auf die Eintrittsalter z einführen. Der Verlauf dieser Funktion läßt sich durch Beobachtung ermitteln.

Es gilt dann

(3) $$\sum_{z=0}^{\omega} v_z = 1$$

wobei z alle Eintrittsalter umfaßt.

Die zur Zeit τ eingetretene Generation verteilt sich demnach auf die einzelnen Alter wie folgt:

$$H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot v_z$$

nach $(t-\tau)$ Jahren, also zur Zeit (t) setzt sich diese Generation zusammen aus:

$$H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \sum_{z=0}^{\omega} v_z w_z (t-\tau)$$

Wir erhalten dann gemäß Gleichung (2) für den Gesamtbestand zur Zeit t:

(4) $$H(t) = \int_0^t H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \sum_{z=0}^{\omega} v_z w_z (t-\tau) \, d\tau$$

C. Entwicklung der Altersverteilung.

$Z_x(t)$ stelle die Zahl der x-jährigen Mitglieder eines Bestandes zur Zeit t dar. Erfolgen die Eintritte in verschiedenen Eintrittsaltern z gemäß der Verteilung v_z, dann ergibt sich für die Zahl der x-jährigen im Zeitpunkt t der Entwicklung die Beziehung:

(5) $$Z_x(t) = \sum_{z=x}^{z=x-t} H(x-z) \cdot \varphi(x-z) \, v_z \, w_z (x-z)$$

D. Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen.

Für die Darstellung der jährlichen Rentenzahlungen müssen wir beachten, daß für die Hinterlassenen eine bestimmte Rente von d % des versicherten Lohnsatzes S(t) vorgesehen ist. Ferner müssen wir berücksichtigen, daß die Besoldung der tödlich

Verunfallten in den Einzelaltern verschieden ist. Wir führen daher eine Verteilungsfunktion des versicherten Lohnsatzes auf die Eintrittsalter z, die Lohnordnung L_z ein. Sie sei so definiert, daß

$$\sum_{z=0}^{\omega} L_z = 1 \qquad \text{ist.} \tag{6}$$

Setzen wir diese Größen in der Grundgleichung ein, so erhalten wir für die gesamten jährlichen Rentenzahlungen zur Zeit t:

$$B(t) = \int_0^t \frac{d}{100} S(\tau) \cdot H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \sum_{z=0}^{\omega} v_z L_z w_z (t-\tau)\, d\tau \tag{7}$$

E. Entwicklung der Deckungskapitalien.

Aus der Entwicklung der jährlichen Rentenbeträge können wir leicht auf die Deckungskapitalien schließen.

Das Deckungskapital ist allgemein prospektiv definiert gleich dem Barwert der künftigen Kassenleistungen vermindert um den Barwert der künftigen Prämien.

Symbolisch geschrieben:

$$V = K - P \tag{8}$$

In der Unfallversicherung werden die Prämien in Höhe der gesamten zukünftigen Belastung, die aus den Unfällen des laufenden Jahres durchschnittlich zu erwarten ist, von den Betrieben zum voraus entrichtet. Diese Prämie ist somit als Einmalprämie zu betrachten, so daß für die während des laufenden Jahres entstehenden Unfallschäden in Zukunft keine Prämien mehr entrichtet werden. Demnach beträgt auch der Barwert der künftigen Prämien $P = o$, womit unsere Grundgleichung (8) für das Deckungskapital übergeht in

$$V = K \tag{9}$$

d. h. in unserem Falle wird das Deckungskapital einfach gleich dem Barwert der künftigen Kassenleistungen.

Zur Bestimmung des Deckungskapitals haben wir demnach den Barwert der künftigen jährlichen Rentenzahlungen zu ermitteln.

Aus Formel (7) erhalten wir durch Multiplikation mit dem Barwert $a_{z\ t-\tau}$ der entsprechenden Rente 1 für das gesamte Deckungskapital zur Zeit t die Beziehung:

$$(10)\quad V(t) = \int_0^t \frac{d}{100} S(\tau) \cdot H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot \sum_{z=0}^{\omega} v_z L_z w_z [t-\tau]\, a_{z\ t-\tau}\, d\tau$$

F. Diskontinuierliche Betrachtungsweise.

Die weitere analytische Behandlung der abgeleiteten Beziehungen ist infolge des komplizierten Baues der auftretenden Funktionen schwierig, so daß wir bei der praktischen Auswertung gezwungen sind, zur diskontinuierlichen Betrachtungsweise überzugehen.

Lassen wir in unseren Ausgangsgleichungen das Ausscheiden und somit auch die Erneuerung in jährlichen Abständen erfolgen, so dürfen wir die Integration als Summe darstellen.

Also:

$$(11)\quad H(t) = \sum_{\tau=0}^{t} H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot \sum_{z=0}^{\omega} v_z w_z (t-\tau)$$

$$(12)\quad B(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \frac{d}{100} S(\tau) \cdot H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \cdot \sum_{z=0}^{\omega} v_z L_z w_z (t-\tau)$$

$$(13)\quad V(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \frac{d}{100} S(\tau) \cdot H(\tau) \cdot \varphi(\tau) \sum_{z=0}^{\omega} v_z L_z w_z (t-\tau)\, a_{z\ t-\tau}$$

Ausgehend von Formel (5) für die Zahl der x-jährigen zur Zeit t erhalten wir nach ganz entsprechenden Ueberlegungen für unsere Grundbeziehungen die drei weiteren Darstellungsarten:

$$(14)\quad H(t) = \sum_{x=0}^{\omega} Z_x(t) = \sum_{x=0}^{\omega} \sum_{z=x}^{x-t} H(x-z)\,\varphi(x-z)\,v_z\,w_z(x-z)$$

$$(15)\quad B(t) = \sum_{x\ 0}^{\omega} R_x(t)$$

$$= \frac{d}{100} \sum_{x\ -0}^{\omega} \sum_{z\ -x}^{x-t} S(x-z)\,H(x-z)\cdot\varphi(x-z)\cdot v_z L_z w_z(x-z)$$

$$(16)\quad V(t)$$

$$= \frac{d}{100} \sum_{x=0}^{\omega} \sum_{z=x}^{x-t} S(x--z)\cdot H(x--z)\cdot\varphi(x-z)\,v_z L_z w_z(x-z)\cdot a_x$$

III. Praktische Auswertung und Anwendung auf die Hinterlassenenversicherung.

A. Gliederung des Hinterlassenenbestandes.

Der Bestand der Hinterlassenenrentner weist eine heterogene Zusammensetzung auf. Es empfiehlt sich daher zur übersichtlichen und rechnerisch einfacheren Behandlung eine Aufteilung in folgende Einzelbestände:

1. Witwenbestand.
2. Kinderbestand.
3. Ascendentenbestand, bestehend aus:
   a. einfachen Ascendenten,
   b. verbundenen Ascendenten.

Stellen wir die prozentualen Gewichte g dieser Bestände fest, so lassen sich am Schlusse die Einzelergebnisse leicht zusammenfassen.

Für den Bestand 3 b der verbundenen Ascendenten treffen wir noch die Vereinbarungen:

1. Zwischen männlichen und weiblichen Ascendenten unterscheiden wir nicht.

2. Geschwister werden als an der Zahl unbedeutend vernachlässigt.
3. Wir beschränken uns auf zwei verbundene Leben und berücksichtigen nur die beiden jüngsten Ascendenten der Verbindung, wobei das Alter des jüngsten Ascendenten als Leitalter gilt. Die übrigen Ascendenten der Verbindung rekrutieren sich meistens aus hohen Altern und dürfen in der Betrachtung wohl unbeschadet der Schlüsse vernachlässigt werden.
4. Als Altersdifferenz $\angle x$ der beiden jüngsten Ascendenten wählen wir auf Grund einer statistischen Erhebung im Mittel 3 Jahre.

B. Bestimmung der Funktionen zur Entwicklung bis zum Beharrungszustand.

1. Die Erneuerungszahl $H(\tau) \cdot \varphi(\tau)$

Als konstanten jährlichen Zugang $H(\tau) \cdot \varphi(\tau)$ wählen wir bei jeder Einzelgesamtheit 1000 Personen, die wir als Eintrittsgesamtheit bezeichnen.

An die Wahl einer konstanten Erneuerung sind zwei weitere Bedingungen gebunden:

1. Die Unfallhäufigkeit bleibt konstant.
2. Die Zahl der Versicherten bleibt gleich.

2. Die Verbleibswahrscheinlichkeiten $w_z(t)$

Diese sind aus den Grundlagen bekannt und lassen sich darstellen:

(17) $$\overset{W}{w}_x(t) = \frac{l^w_{x+t}}{l^w_x}$$ für Witwen

(18) $$\overset{K}{w}_x(t) = \frac{l^K_{x+t}}{l^K_x}$$ für Kinder

(19) $$\overset{A}{w}_x(t) = \frac{l^A_{x+t}}{l^A_x}$$ für einfache Ascendenten.

(20) $$\overset{A_1 A_2}{w}_x(t) = \overset{A_1}{w}_x(t) + \overset{A_2}{w}_x(t) - \overset{A_1}{w}_x(t) \cdot \overset{A_2}{w}_x(t)$$

für verbundene Ascendenten.

Beziehung (20) läßt sich noch wie folgt umwandeln:

$$\overline{\overset{A_1 A_2}{w}_x(t)} = \overset{A_1}{w}_x(t) \cdot \overset{A_2}{w}_x(t) + \left[\overset{A_1}{w}_x(t) + \overset{A_2}{w}_x(t) - 2\, \overset{A_1}{w}_x(t) \cdot \overset{A_2}{w}_x(t) \right]$$

(21) $$\overline{\overset{A_1 A_2}{w}_x(t)} = \underbrace{\overset{A_1}{w}_x(t) \cdot \overset{A_2}{w}_x(t)}_{\text{I}} + \left[\underbrace{\overset{A_1}{w}_x(t) - \overset{A_1 A_2}{w}_x(t)}_{\text{II}} \right] + \left[\underbrace{\overset{A_2}{w}_x(t) - \overset{A_1 A_2}{w}_x(t)}_{\text{III}} \right]$$

I stellt die Verbleibswahrscheinlichkeit für beide Ascendenten A_1 und A_2 dar,

II stellt die Allein-Verbleibswahrscheinlichkeit der ersten Ascendenten A_1 dar,

III stellt die Allein-Verbleibswahrscheinlichkeit des zweiten Ascendenten A_2 dar.

3. Die Altersverteilungsfunktion v_z

Aus der Statistik stellen wir die Altersverteilungen

$\overset{W}{v}_z$ der Witwen

$\overset{K}{v}_z$ der Kinder

$\overset{A_1}{v}_z$ der einfachen Ascendenten

$\overset{A_2}{v}_z$ der verbundenen Ascendenten fest.

4. Die Lohnordnung L_z

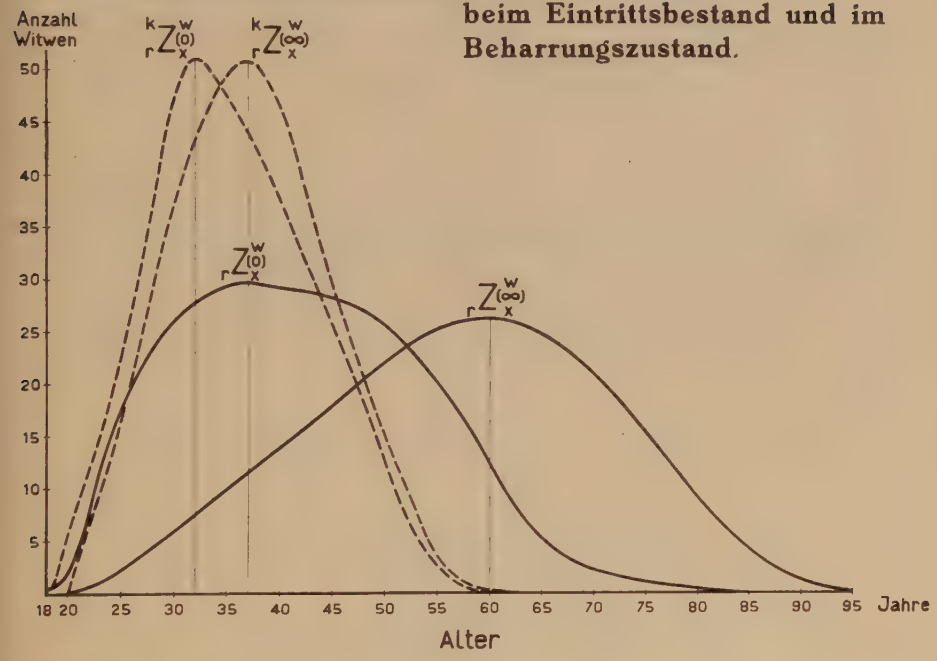
Wir führen die Berechnung auf Grund des Mittellohnes durch, so daß

(23) $$L_z = \text{konst.} = 1$$

zu setzen ist.

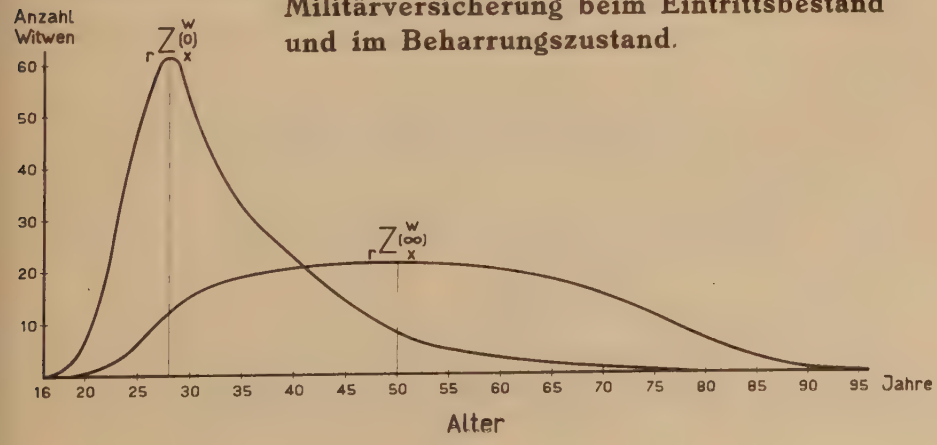
Darstellung II.

Relative Altersverteilung der S. U. V. A.-Witwen beim Eintrittsbestand und im Beharrungszustand.



Darstellung III.

Relative Altersverteilung der Witwen der Militärversicherung beim Eintrittsbestand und im Beharrungszustand.



5. Der Lohnsatz $S(\tau)$

Unter dem Lohnsatz $S(\tau)$ verstehen wir die gesamte versicherte Lohnsumme Ls. bezogen auf einen Versicherten. Wir stellen die Bedingung, daß der Lohnsatz mit der Zeit konstant bleiben soll und setzen daher:

(24) $$S(\tau) = S = \text{konst.}$$

Die Lohnsumme Ls. selbst ist eine Funktion des Lohnsatzes und der Zahl der Versicherten. Setzen wir sowohl den Lohnsatz, als auch die Zahl der Versicherten konstant, wie das hier geschehen ist, so bleibt auch die Lohnsumme Ls. konstant. Unsere Entwicklung des Beharrungszustandes gilt also nur bei konstanter Lohnsumme.

6. Die Barwerte a_x sind aus der Einleitung bekannt.

C. Auswertung der Entwicklungsformeln für den Beharrungszustand.

Nach den getroffenen Voraussetzungen können wir unsere Grundbeziehung in kürzere Form bringen.

Wir setzen:

(25) $$H(t) \cdot \varphi(t) \cdot v_z = Z_z(t)$$

und $$w_z(x - z) = \frac{l_x}{l_z}$$

Damit erhalten wir die zur Auswertung verwendeten Darstellungen:

(26) $$H(t) = \sum_{x=0}^{\omega} l_x \sum_{z=x}^{x-t} \frac{Z_z(t)}{l_z} = \sum_{x=0}^{\omega} l_x \cdot s_z(t)$$

(27) $$B(t) = \frac{dS}{100} \sum_{x=0}^{\omega} l_x \sum_{z=x}^{x-t} \frac{Z_z(t)}{l_z} - \frac{dS}{100} H(t)$$

$$(28) \qquad V(t) = \frac{d \cdot S}{100} \sum_{x=0}^{\omega} l_x \cdot a_x \sum_{z-x}^{x-t} \frac{Z_z(t)}{l_z} = \frac{d\,S}{100} \sum_{x-0}^{\omega} l_x a_x \cdot s_z(t)$$

D. Die gekürzten Renten.

Um den Anteil der gekürzten Renten in der ganzen betrachteten Entwicklung beurteilen zu können, stellen wir ihr Gewicht im Verhältnis der gesamten Renten fest. Im übrigen erhalten wir auf Grund ganz analoger Ueberlegungen wie bei den ungekürzten Renten die Relationen:

$$(29) \qquad {}^{k}H(t) = \sum_{x=0}^{\omega} l_x \sum_{z=x}^{x-t} \frac{{}^{k}Z_z(t)}{l_z}$$

$$(30) \qquad {}^{k}B(t) = \frac{d \cdot S}{100} \sum_{x=o}^{\omega} l_x \sum_{z=x}^{x-t} \frac{{}^{k}Z_z(t)}{l_z}$$

$$(31) \qquad {}^{k}V(t) = \frac{d \cdot S}{100} \sum_{x=0}^{\omega} l_x \cdot a_x \sum_{x-0}^{x-t} \frac{{}^{k}Z_z(t)}{l_z}$$

Dabei bedeutet ${}^{k}Z_z(t)$ die Zahl der z-jährigen bei gekürzten Renten zur Zeit t.

E. Entwicklung des gesamten Hinterlassenenbestandes bei konstanter Lohnsumme.

Unter Berücksichtigung der Gewichtszahlen g erhalten wir für den ganzen Hinterlassenenbestand die Auswertungen:

$$H(t) = {}^{W}g\,{}^{W}H(t) + {}^{K}g\,{}^{K}H(t) + {}^{A}g\,{}^{A}H(t) + {}^{A_1}g\,{}^{A_1}H(t) + {}^{A_2}g\,{}^{A_2}H(t) + {}^{A_1A_2}g\,{}^{A_1A_2}H(t)$$

$$(32) \qquad - \left[{}^{kW}g_{,}\,{}^{kW}H(t) - {}^{kK}g_{,}\,{}^{kK}H(t) + {}^{kA}g_{,}\,{}^{kA}H(t) + \ldots + {}^{kA_1A_2}g_{,}\,{}^{kA_1A_2}H(t) \right]$$

oder in kürzerer Schreibweise:

$$H(t) = \sum_i {}^{i}_{i}g\, H(t) - \sum_i {}^{k}_{i}{}^{i}_{k}{}^{i}_{i}g\, H(t) \tag{33}$$

wobei i läuft über alle Rentnerbestände.

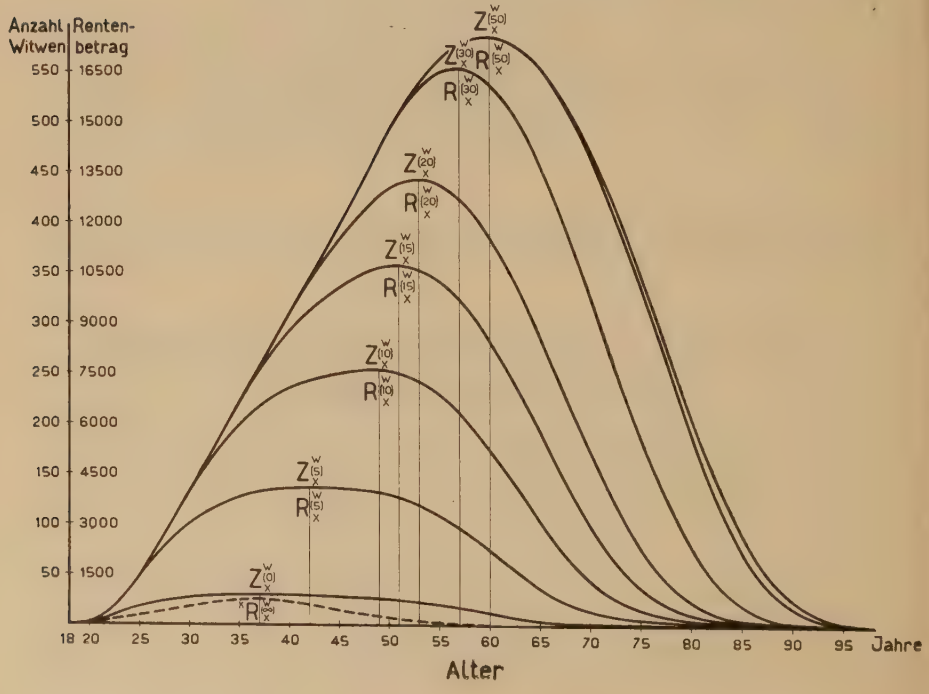
Analog:

$$B(t) = \sum_i {}^{i}_{i}g\, B(t) - \sum_i {}^{k}_{i}{}^{i}_{k}{}^{i}_{i}g\, B(t) \tag{34}$$

$$V(t) = \sum_i {}^{i}_{i}g\, V(t) - \sum_i {}^{k}_{i}{}^{i}_{k}{}^{i}_{i}g\, V(t) \tag{35}$$

Darstellung IV.

Entwicklung des Witwenbestandes und der jährlichen Rentenzahlungen an Witwen bis zum Beharrungszustand bei Lohnsatz 100.



F. Die Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen und der Deckungskapitalien bei veränderlicher Lohnsumme.

Für unsere bisherigen Untersuchungen haben wir vorausgesetzt, die Lohnsumme bleibe konstant. Da die Lohnsumme selbst Funktion der Zahl der Versicherten und des Lohnsatzes ist, bedingte dies auch eine Konstanz dieser beiden Größen. Die konstante Zahl der Versicherten, vereinigt mit einer gleichbleibenden Unfallhäufigkeit, führte zur konstanten Erneuerungszahl. Diese Voraussetzung wollen wir auch für unsere weiteren Betrachtungen beibehalten, so daß eine Veränderung der Lohnsumme nur aus Schwankungen des Lohnsatzes entsteht.

Um den Einfluß eines veränderlichen Lohnsatzes auf die jährlichen Rentenzahlungen und die Deckungskapitalien absolut beurteilen zu können, müssen wir alle anderen Ursachen, die auf diese beiden Größen verändernd wirken könnten, ausschalten. Bleibt der Lohnsatz konstant, so sollen also auch die jährlichen Rentenzahlungen und die Deckungskapitalien konstant bleiben. Diese Bedingung ist erfüllt in dem eben entwickelten Beharrungszustand; dieser hat somit als Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen zu gelten. Hieraus ergibt sich, daß der Bestand der Rentner $H(t)$ konstant bleibt. Wir haben hier eine offene, sich erneuernde Gesamtheit im Moser'schen Sinne vor uns, auf die sich zwei versicherbare Vorgänge vererben, die Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen und der Deckungskapitalien bei veränderlicher Lohnsumme.

Zur Darstellung der notwendigen Entwicklungen dient uns die Moser'sche Grundgleichung:

$$(1) \qquad H(t)\,Y(t) = H(t)\,y(t) + \int_0^t H(\tau)\cdot\varphi(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$$

Betrachten wir als Vorgang zunächst die Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen bei variabler Lohnsumme ${}^{v}B(t)$, so wird die Vorgangsfunktion $y(t)$ für die geschlossene Gesamtheit dargestellt durch:

$$y(t-\tau) = w(t-\tau)\,\frac{d}{100}\,S(\tau).$$

für $\tau = 0$:

$$y(t) = w(t)\,\frac{d}{100}\,S(o)$$

Berücksichtigen wir noch, daß H (t) konstant ist, so geht (1) über in:

(36) $$^{V}B(t) = H\,Y(t) = H\,w(t)\,\frac{d}{100}\,S(0) + \int_0^t H \cdot \varphi(\tau) \cdot w(t-\tau) \cdot \frac{d}{100} \cdot S(\tau) \cdot d\tau$$

Für die Entwicklung der Deckungskapitalien ergibt sich entsprechend:

(37) $$^{V}V(t) = H\,Y(t) = H\,w(t)\,\frac{d}{100}\,S(0)\,a(t) + \int_0^t H \cdot \varphi(\tau)\,w(t-\tau)\,\frac{d}{100}\,S(\tau)\,a(t-\tau) \cdot d\tau$$

Zur Berechnung sind aus den früheren Abschnitten alle auftretenden Funktionen bekannt, außer den Barwerten a (t) und der Entwicklung des Lohnsatzes S (t).

Die Barwerte a (t) ergeben sich aus der geschlossenen Gesamtheit durch Berechnung der Barwertfläche.

Zur Aufstellung der Zahlwerte S (t) nehmen wir eine Entwertung des Schweizerfrankens an, der eine entsprechende Aufwertung der Arbeitslöhne und damit eine Veränderung unseres Lohnsatzes S (t) folgen soll.

Zeitdauer t	Kurswert des Schweizerfrankens	Entwicklung des Lohnsatzes S (t)
0	100	100
1	75	133
2	50	200
3	50	200
4	53	190
5	56	180
6	59	170
7	63	160
8	67	150
9	67	150
10	67	150

Die rechnerischen Resultate dieses Kapitels sind in den Tabellen am Schlusse zusammengestellt. Ueber die Struktur und den Verlauf der untersuchten Rentnerbestände, sowie über die Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen und der Deckungskapitalien geben die beigefügten graphischen Darstellungen allen gewünschten Aufschluß, so daß auf eine weitere Besprechung der Rechnungsergebnisse verzichtet werden darf.

Damit sind auch die hauptsächlichsten Fragen, die mit dem Problem der Hinterlassenenrenten in der Sozialversicherung verknüpft sind, gelöst. Es bleibt nur noch die Behandlung der Verbindungsrenten auf das längste Leben, die, wie wir gesehen haben, eine wesentliche Rolle spielen. Der theoretischen Untersuchung dieser Rentengattung soll deshalb noch ein besonderes Kapitel gewidmet sein.

5. Kapitel.

Ueber Verbindungsrenten.

I. Die Verbindungsrente im weitern Sinne.

1. Einleitung.

Wie aus den frühern Kapiteln hervorgeht, sind die Hinterlassenenrenten im allgemeinen Vereinigungen von laufenden und aufgeschobenen Renten, bei welchen die Verbindungsrenten auf das längste Leben eine wichtige Rolle spielen. Die theoretische Behandlung dieser Renten ist heute noch keine abgeschlossene, die praktische Berechnung noch viel weniger. Es schien daher notwendig, wie einleitend bereits bemerkt worden ist, die Beziehung zwischen den Verbindungsrenten auf das kürzeste Leben und denjenigen auf längstes Leben zunächst einer theoretischen Untersuchung zu unterziehen. Die Resultate sind nicht ohne Interesse und ergeben einen neuen Beweis für den Wert der von Dr. Thalmann tabulierten Prym'schen Funktion.

2. Berechnung von Verbindungsrenten.

Wir verstehen unter einer Verbindungsrente im weitern Sinne jede Rente, die an einen Komplex von Lebenden $x_1\ x_2\ \ldots\ldots\ x_m$ gebunden ist. Ueber ihren Beginn, ihren Abschluß (Ende), die Höhe des Rentenbezuges, die Reihenfolge der Bezugsberechtigten, können mannigfache Bestimmungen getroffen sein, umso mannigfacher, je größer die Zahl m der verbundenen Leben ist. Unter der Fülle der möglichen Formen haben aber nur wenige praktische Bedeutung erlangt.

Zur Wertbestimmung von Verbindungsrenten im allgemeinen sind neben den Leibrenten die Verbindungsrenten im engern Sinne (Verbindungsrenten auf das kürzeste Leben) die Grundlage. Wir werden zeigen, daß sich alle übrigen Renten in einfacher Weise aus diesen kombinieren lassen.

Man versteht unter der Verbindungsrente auf das kürzeste Leben eine Rente, die mit gleichbleibendem Jahrestage so lange

läuft, als der ganze Komplex von m Personen am Leben bleibt. Der Komplex spielt also einer solchen Rente gegenüber die Rolle eines Individuums, das mit dem Tode der ersten Person aus dem Komplex zu bestehen aufhört.

Der Wert der Verbindungsrente auf das kürzeste Leben, bezogen auf den Jahresbetrag 1 wird mit $a_{x_1 x_2 \cdots x_m}$ bezeichnet. Ist ${}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die m Personen nach n Jahren noch am Leben sein werden, so ist der Wert der Verbindungsrente auf das kürzeste Leben gegeben durch:

$$(1) \qquad a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \sum_{n=0}^{\sigma-1} v^n \, {}_nP_{x_1 \ldots x_m}$$

wobei

$${}_0P_{x_1 x_2 \ldots x_m} = 1$$
$${}_\sigma P_{x_1 x_2 \ldots x_m} = 0$$

Macht man die sicher nicht immer zutreffende Voraussetzung, die Leben seien voneinander unabhängig, so daß der Tod eines Individuums auf die Lebensdauer der Ueberlebenden keinen Einfluß ausübt, so stellt sich ${}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}$ als Produkt der auf die einzelnen Leben und dasselbe Ereignis bezüglichen Wahrscheinlichkeiten dar.

Man setzt also in Konsequenz dieser Voraussetzung:

$${}_nP_{x_1 x_2 \ldots x_m} = {}_nP_{x_1} \cdot {}_nP_{x_2} \cdot \cdots \cdot {}_nP_{x_m}$$

und rechnet die einzelnen Faktoren der rechten Seite mit Hilfe der Sterbetafel. Dabei ist zu unterscheiden, ob die einzelnen Leben als gleichwertige Risiken, also nach derselben Tafel zu behandeln sind, oder ob sie Gesamtheiten verschiedenen Sterblichkeitsverlaufes angehören und daher nach verschiedenen Tafeln zu beurteilen sind (z. B. Männer, Frauen, Kinder etc.).

Der weitern technischen Durchführung dieser Verbindungsrenten wurden viele Arbeiten gewidmet. Am meisten Bedeutung für die Versicherungstechnik hat entschieden das sogenannte Gesetz des gleichmäßigen Alterns.

Es läßt sich wie folgt formulieren:

Wenn die Sterbetafel der Formel von Makeham folgt $l_x = k s^x g^{c^x}$ ist es möglich, Verbindungsrenten, die zu verschiedenen Altern gehören, durch Verbindungsrenten ebensovieler gleichaltriger Leben darzustellen:

$$a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = a_{\omega\,\omega\,\omega\,\ldots\,\omega} = a_{[m]\,\cdot\,\omega}$$

Das sogenannte „mittlere Alter" oder Zentralalter ω genügt der Bedingung :

$$c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_m} = m\,c^{\omega}$$

oder unter Zuhilfenahme der Intensitäten.

$$\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \ldots + \mu_{x_m} = m\,\mu_{\omega}$$

Dabei ist nicht zu übersehen, daß dieses Gesetz auf der Annahme beruht, daß die verbundenen Leben gleichwertige Risiken repräsentieren.

3. Verbindungsrenten bis zu einem spätern Tode.

Die Fülle möglicher Formen von Verbindungsrenten bis zu einem spätern Tode läßt sich im wesentlichen durch zwei Typen charakterisieren:

Type I.: An die Verbindung der m Leben $x_1\,x_2\,\ldots\,x_m$ sei die vorschüssige Rente 1 solange zahlbar, als mindestens r davon am Leben sind, d. h. ebenso viel als bis zum $m - r + 1$ ten Tode. Den Barwert dieser Rente bezeichnen wir mit $a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}^{\;\;r}$

Bezeichnen wir mit ${}_np_{x_1 x_2 \ldots x_m}^{\;\;r}$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Jahren mindestens r von m Individuen noch leben, so ergibt sich der Wert obiger Rente zu:

$$(2) \qquad a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}^{\;\;r} = \sum_{n=0}^{\sigma-1} v^n\,{}_np_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}^{\;\;r}$$

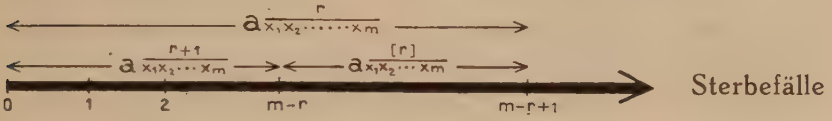
dabei gilt:

$${}_0p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}^{\;\;r} = 1$$

Type II.: An die Verbindung der m Leben $x_1\ x_2\ \ldots\ x_m$ sei die vorschüssige Rente 1 solange zahlbar, als g e r a d e r davon am Leben sind, also vom m—r ten bis zum m—r+1 ten Tode. Ihr Barwert ergibt sich zu:

(3) $$a_{x_1 x_2 \ldots x_m}^{[r]} = \sum_{n=0}^{\sigma-1} v^n\ {}_np_{x_1 x_2 \ldots x_m}^{[r]}$$

dabei bedeutet ${}_np_{x_1 x_2 \ldots x_m}^{[r]}$ die Wahrscheinlichkeit, daß von den m Personen nach n Jahren genau r am Leben sind.



Type II läßt sich auch als Differenz darstellen:

$$a_{x_1 x_2 \ldots x_m}^{[r]} = a_{x_1 x_2 \ldots x_m}^{r} - a_{x_1 x_2 \ldots x_m}^{r+1}$$

Ist beim Problem I nur der Zeitpunkt des Aufhörens der Rente unbestimmt, so ist es bei II auch der Zeitpunkt des Beginns.

Es sind nun die beiden Wahrscheinlichkeiten

$${}_np_{x_1 x_2 \ldots x_m}^{[r]} \quad \text{und} \quad {}_np_{x_1 x_2 \ldots x_m}^{r} \quad \text{zu ermitteln.}$$

Es ist:

(4) $${}_np_{x_1 x_2 \ldots x_r} \cdot {}_nq_{x_{r+1}\, x_{r+2} \ldots x_m}$$

$$= {}_np_{x_1 x_2 \ldots x_r} \left(1 - {}_np_{x_{r+1}}\right)\left(1 - {}_np_{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - {}_np_{x_m}\right)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die r b e s t i m m t e n Individuen

$$x_1,\ x_2\ \ldots\ x_r$$

am Ende der Zeit n noch leben, während alle übrigen gestorben sind.

Die Summation

$$(5)\qquad \sum {}_{n}p_{x_1 x_2 \ldots x_r}\left(1-{}_{n}p_{x_{r+1}}\right)\left(1-{}_{n}p_{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1-{}_{n}p_{x_m}\right) = {}_{n}p_{\underset{x_1 x_2 \ldots x_m}{[r]}}$$

erstreckt auf alle $\binom{m}{r}$ möglichen Produkte, deren jede die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von r bestimmten Individuen unter den m ausdrückt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Entwicklung von (5) führt zu einer Summe, deren Glieder nur Faktoren aus der Folge ${}_{n}p_{x_1}\,{}_{n}p_{x_2}\ldots{}_{n}p_{x_m}$ enthalten und zwar kommen Glieder mit r, $r+1$ ... bis m Faktoren vor. Man sieht leicht, daß die Produkte ${}_{n}p_{x_1' x_2' \ldots x_r'}$ die die Ueberlebenswahrscheinlichkeit einer Gruppe von r Individuen ausdrücken, nur ein einziges Mal vorkommen. Dagegen kommt jedes der Glieder ${}_{n}p_{x_1' x_2' \ldots x_{r+i}'}$ $(i = 1, 2, \ldots m-r)$, welche die Ueberlebenswahrscheinlichkeit einer Gruppe von $r+i$ Individuen darstellen, wiederholt vor.

Bezeichnen wir mit A_i die Zahl, die die Häufigkeit des Vorkommens von ${}_{n}p_{x_1' x_2' \ldots x_{r+i}'}$ darstellt und mit Z_{r+i} die Summation $\sum {}_{n}p_{x_1' x_2' \ldots x_{r+i}'}$ erstreckt, auf alle $\binom{m}{r+i}$ Kombinationen $(r+i)$ ter Klasse von Elementen, so wird:

$$(6)\qquad {}_{n}p_{\underset{x_1 x_2 \ldots x_m}{[r]}} = Z_r + A_1 Z_{r+1} + A_2 Z_{r+2} + \ldots + A_{m-r} Z_m$$

Die Koëffizienten $A_1, A_2 \ldots\ldots A_{m-r}$ sind unabhängig von ${}_{n}p_{x_i}$ und zu ihrer Bestimmung setzt man:

$${}_{n}p_{x_1} = {}_{n}p_{x_2} = \ldots\ldots = {}_{n}p_{x_m} = p$$

Gleichung (5) wird dann:

$$(7)\qquad \binom{m}{r}p^r(1-p)^{m-r} = \binom{m}{r}p^r - \binom{m}{r}\binom{m-r}{1}p^{r+1} + \binom{m}{r}\binom{m-r}{2}p^{r+2} - + \ldots + (-1)^r\binom{m}{r}\binom{m-r}{r}p^m$$

Im Falle der Gleichheit der p dem Gleichung (7) entspricht, ist:

$$Z_r = \binom{m}{r}p^r\ ;\ Z_{r+1} = \binom{m}{r+1}p^{r+1}\ ;\ \ldots\quad Z_m = p^m$$

so daß wir aus (6) als besonderen Wert erhalten:

$$(8)\quad {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[r]} = \binom{m}{r} p^r + A_1 \binom{m}{r+1} p^{r+1} + \ldots + A_{m-r}\, p^m$$

Aus Vergleichung von Gleichung (7) und Gleichung (8) folgt:

$$(9)\quad \begin{cases} A_1 = -\binom{m}{r}\binom{m-r}{1}\dfrac{1}{\binom{m}{r+1}} = -\binom{r+1}{1} \\ A_2 = \binom{m}{r}\binom{m-r}{2}\dfrac{1}{\binom{m}{r+2}} = \binom{r+2}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-r} = (-1)^{m-r}\binom{m}{m-r} \end{cases}$$

und indem wir in die Gleichung (6) die Werte (9) einsetzen

$$(10)\quad {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[r]} = Z_r - \binom{r+1}{1} Z_{r+1} + \binom{r+2}{2} Z_{r+2} - + \ldots - (-1)^{m-r}\binom{m}{m-r} Z_m$$

Beachtet man, daß

$$\frac{1}{(1+Z)^{r+1}} = 1 - \binom{r+1}{1} Z + \binom{r+2}{2} Z^2 - + \ldots + (-1)^{m-r}\binom{m}{m-r} Z^{m-r} - + \ldots$$

und ersetzt die Indizes der Z durch Exponenten, so kann der Gleichung (10) die symbolische Form gegeben werden:

$$(11)\quad {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[r]} = \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}} \quad \text{wobei } Z_{m+1} = Z_{m+2} \cdots = 0$$

(12) Die Wahrscheinlichkeit ${}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{r}$ daß von m Individuen mindestens r nach n Jahren noch leben, ist offenbar durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten definiert, daß r, r + 1, r + 2 ... m Individuen überleben.

Der Wert des Ausdruckes (12) kann also aus den Wahrscheinlichkeiten ${}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[r]}$ abgeleitet werden, indem man der Reihe nach für r die Werte $r, r+1, r+2 \ldots m$ einsetzt und bekannte Sätze der Kombinatorik zur Vereinfachung der erhaltenen Ausdrücke anwendet.

Die konsequente Durchführung des symbolischen Kalküls führt indessen rascher zum Ziel und kann also zur Gewinnung der nötigen Formeln, wenn auch nicht zu ihrem durchaus strengen Beweis, mit Nutzen angewandt werden.

Es gilt identisch:

$$ {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{r} - {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{r+1} = {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[r]} $$

also:

(13) $$ {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{r} = {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[r]} + {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{r+1} $$

Bedenkt man, daß

$$ {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{o} = 1 $$

$$ {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[o]} = \frac{Z^0}{1+Z} = \frac{1}{1+Z} $$

so hat man unmittelbar unter Berücksichtigung von (13)

$$ {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{1} = 1 - \frac{1}{1+Z} = \frac{Z}{1+Z} $$

$$ {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{2} = \frac{Z}{1+Z} - \frac{Z}{(1+Z)^2} = \frac{Z^2}{(1+Z)^2} $$

. . . . . .

$$ {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{r} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r} $$

Man sieht ohne weiteres, daß diese Gleichung auch gilt für $r \longrightarrow r+1$

$$ \frac{Z^r}{(1+Z)^r} - \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}} = \frac{Z^{r+1}}{(1+Z)^{r+1}} $$

Wir haben allgemein:

$$(14)\quad {}_nP_{\frac{r}{x_1 x_2 \cdots x_m}} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r} \text{ wobei } Z^{m+1} = Z^{m+2} = \ldots = 0$$

oder in entwickelter Form:

$$(15)\quad {}_nP_{\frac{r}{x_1 x_2 x_3 \cdots x_m}} = Z_r - \binom{r}{1} Z_{r+1} + \binom{r+1}{2} Z_{r+2} - + \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m-1}{m-r} Z_m$$

Aus Formel (2) und (3) haben wir:

$$(2)\quad a_{\frac{r}{x_1 x_2 \cdots x_m}} = \sum_{n=0}^{\sigma-1} v^n \, {}_nP_{\frac{r}{x_1 x_2 \cdots x_m}}$$

$$(3)\quad a_{\frac{[r]}{x_1 x_2 \cdots x_m}} = \sum_{n=0}^{\sigma-1} v^n \, {}_nP_{\frac{[r]}{x_1 x_2 \cdots x_m}}$$

Berücksichtigen wir (10) bezw. (15), so sehen wir, daß sich (2) und (3) durch Ausdrücke von gleicher Form wie (10) und (15) bestimmen lassen, nur daß nunmehr an Stelle von

$$Z_k = \sum {}_nP_{x_1 x_2 \cdots x_k}$$

zu setzen ist,

$$S_k = \sum a_{x_1 x_2 \cdots x_k}$$

wobei S_k die Summe der Verbindungsrenten auf kürzestes Leben für alle $\binom{m}{k}$ Kombinationen kter Klasse von m Elementen bedeutet

Wir finden also:

$$(16)\quad a_{\frac{r}{x_1 x_2 \cdots x_m}} = S_r - \binom{r}{1} S_{r+1} + \binom{r+1}{2} S_{r+2} - + \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m-1}{m-r} S_m$$

$$(17)\quad a_{\frac{[r]}{x_1 x_2 \cdots x_m}} = S_r - \binom{r+1}{1} S_{r+1} + \binom{r+2}{2} S_{r+2} - + \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} S_m$$

Aus dieser Deduktion geht hervor, daß sich alle Verbindungsrenten auf späteren Tod, die dargestellt werden durch (16) und (17) linear ausdrücken lassen, durch Verbindungsrenten auf kürzestes Leben $a_{x_1 x_2 \cdots x_k}$ für alle ganzzahligen Werte $k = r, r+1, r+2 \ldots m$

4. Spezialfälle und Beispiele:

Wird $r = 1$ so schreibt man:

$$a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} = a_{x_1 x_2 \cdots x_m}$$

Die Rente wird ausbezahlt, solange noch ein Ueberlebender aus der Verbindung vorhanden ist, daher die Bezeichnung **Verbindungsrente auf das längste Leben.**

Formel (16) lautet für diesen Fall:

$$(18)\quad a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} = S_1 - S_2 + S_3 - + \ldots + (-1)^{m-1} S_m$$

Formel (17) geht über in

$$(19)\quad a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}^{[1]} = S_1 - 2S_2 + 3S_3 - + \cdots + (-1)^{m-1} m S_m$$

Wird $r = m$ gewählt, so haben wir:

$$a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}^{m} = a_{x_1 x_2 \cdots x_m}$$

die einfache Verbindungsrente, oder Verbindungsrente auf das **kürzeste Leben.**

Betrachten wir die Formeln (18) und (19) für gleiche Alter, so ergibt sich:

$$(20)\quad a_{\overline{[m]\,\omega}} = \binom{m}{1} a_{\omega} - \binom{m}{2} a_{\omega\omega} + \binom{m}{3} a_{\omega\omega\omega} - + \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} a_{[m]\,\omega}$$

und

$$(21)\quad a_{\overline{[m]\,\omega}}^{[1]} = \binom{m}{1} a_{\omega} - 2\binom{m}{2} a_{\omega\omega} + 3\binom{m}{3} a_{\omega\omega\omega} + \cdots + (-1)^{m-1} m \binom{m}{m} a_{[m]\cdot\omega}$$

Analoge Formeln ergeben sich aus (16) und 17)

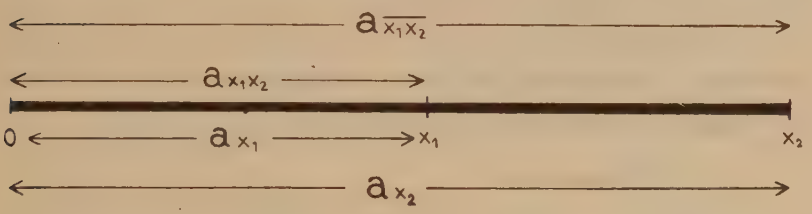
Beispiel: $m = 2$; x_1 und x_2 die betrachteten Leben. Aus (18) ergibt sich:

$$a_{\overline{x_1 x_2}} = a_{x_1} + a_{x_2} - a_{x_1 x_2}$$

Eine durchaus einfache Betrachtung erlaubt andererseits diese Beziehung ohne weiters niederzuschreiben:

$(a_{x_1} - a_{x_2})$ bezeichnet den Wert einer Rente, deren Betrag 2 ist, solange x_1 und x_2 leben und deren Betrag 1 solange entweder nur x_1 oder nur x_2 am Leben ist. Subtrahieren wir $a_{x_1 x_2}$ eine Rente, deren Wert = 1 solange x_1 und x_2 leben, so reduziert sich damit der Betrag der Rente auf 1, und wir haben eine Rente vom konstanten Betrag 1, die bis zum Tode der beiden Versicherten ausbezahlt wird.

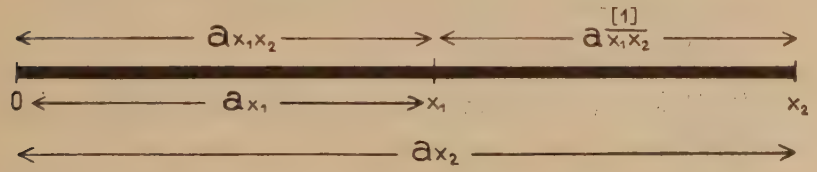
Wenn z. B. x_1 zuerst stirbt, so wird:



Analog ergibt sich aus (19)

$$a^{[1]}_{x_1 x_2} = a_{x_1} + a_{x_2} - 2\,a_{x_1 x_2}$$

Wenn wiederum x_1 zuerst stirbt, so ist:



Es sei $m = 3$; x_1, x_2, x_3 die versicherten Leben.

Aus (16) und (17) ergeben sich:

$$a^{2}_{x_1 x_2 x_3} = a_{x_1 x_2} + a_{x_1 x_3} + a_{x_2 x_3} - 2\,a_{x_1 x_2 x_3}$$

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3}} = a_{x_1} + a_{x_2} + a_{x_3} - (a_{x_1 x_2} + a_{x_1 x_3} + a_{x_2 x_3}) + a_{x_1 x_2 x_3}$$

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3}}^{[1]} = a_{x_1} + a_{x_2} + a_{x_3} - 2\,(a_{x_1 x_2} + a_{x_1 x_3} + a_{x_2 x_3}) + 3\,a_{x_1 x_2 x_3}$$

Auch diese Barwerte lassen sich, wenn auch schwieriger als die vorigen, durch schematische Betrachtung herleiten.

5. Allgemeine Darstellung für Verbindungsrenten im weiteren Sinne.

Folgendes Schema umfaßt nun alle möglichen Probleme und stellt daher eine Vereinigung der Formeln (16) und (17) dar:

$$(22) \qquad a = h\,S_1 + k\,S_2 + \cdots\cdots + s\,S_{m-1} + t\,S_m$$

S_r stellt wie in früheren Formeln die Summe aller $\binom{m}{r}$ Renten dar, die durch die Kombinationen rter Klasse von m Leben $x_1\,x_2 \ldots x_m$ definiert werden.

Die Koëffizienten h, k, l ..... s, t stellen Rentenbeträge dar und sind als solche von der Zeit unabhängig.

Das erste Glied hS_1 definiert eine Rente vom Betrage

m.h	solange alle m	Individuen am Leben sind
(m — 1)h	„ nur m — 1	
(m — 2)h	„ „ m — 2	
. . . . .		
h	„ „ 1	Individuum am Leben ist.

Das zweite Glied kS_2 eine Rente vom Betrage

$\binom{m}{2}$ k	solange alle m	Individuen am Leben sind
$\binom{m-1}{2}$ k	„ nur (m — 1)	
$\binom{m-2}{2}$ k	„ „ (m — 2)	
. . . . .		

das m^{te} Glied eine Rente vom Betrage

$\binom{m}{m}$ t solange alle m Individuen am Leben sind.

Es ist also:

$$\binom{m}{1} h + \binom{m}{2} k + \binom{m}{3} l + \cdots + \binom{m}{m-1} s + \binom{m}{m} t = G_m$$

der Betrag der Gesamtrente, solange alle m Individuen leben.

$$\binom{m-1}{1} h + \binom{m-1}{2} k + \binom{m-1}{3} l + \cdots + \binom{m-1}{m-1} s = G_{m-1}$$

Gesamtbetrag solange nur (m — 1) Individuen am Leben sind.

. . . . . .

$$\binom{1}{1} h = G_1$$

Gesamtbetrag solange nur 1 Individuum am Leben ist.

Werden die Gesamtbeträge G_k (k = 1,2 ..... m) willkürlich gewählt, so liefert die Auflösung des resultierenden Systems von m Gleichungen das Wertsystem der Unbekannten, h, k, l ..... s, t. Aus diesen und aus den S_k läßt sich der Wert einer Rente zusammensetzen, deren Beträge während des Ueberlebens von m, m — 1, ... 2,1 Individuen bzw. durch G_m, G_{m-1}, ... G_1 definiert sind.

Man sieht unmittelbar, daß zu

$$a_{x_1 x_2 \cdots x_m} \; ; \; G_m = G_{m-1} = \cdots = G_1 = 1$$

$$a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}^{\;r} \; ; \; G_m = G_{m-1} = \cdots = G_r = 1$$

$$G_{r-1} = G_{r-2} = \cdots = G_1 = 0$$

$$a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}^{\;[r]} \; ; \qquad G_r = 1$$

$$G_m = G_{m-1} = \cdots = G_{r+1} = G_{r-1} = \cdots = G_1 = 0$$

der Reihe nach gehören.

Spezialisierung der Formel (22) für m = 3.

$$a = h S_1 + k S_2 + l S_3$$

$$G_3 = \binom{3}{1} h + \binom{3}{2} k + \binom{3}{3} l = 3h + 3k + l$$

$$G_2 = \binom{2}{1} h + \binom{2}{2} k = 2h + k$$

$$G_1 = \binom{1}{1} h = h$$

Beispiele:

1) Verbindungsrente auf längstes Leben: $a_{\overline{x_1 x_2 x_3}}$

$$G_3 = G_2 = G_1 = 1$$

$$G_1 = h = 1 \; ; \; G_2 = 2h + k = 1 \; ; \; k = -1$$

$$G_3 = 3h + 3k + 1 = 3 - 3 + 1 = 1 \; ; \; l = 1$$

also $$a_{\overline{x_1 x_2 x_3}} = S_1 - S_2 + S_3$$

(2) für $a_{\overline{x_1 x_2 x_3}}^{[1]}$ ist: $G_3 = o \; ; \; G_2 = o \; ; \; G_1 = 1$

$$G_1 = h = 1 \; ; \; 2h + k = 2 + k = o \; ; \; k = -2$$

$$3h + 3k + l = 3 - 6 + l = o \; ; \; l = 3$$

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3}}^{[1]} = S_1 - 2S_2 + 3S_3$$

(3) für $a_{x_1 x_2 x_3}$ ist:

$$G_3 = 1 \; ; \; G_2 = G_1 = o$$

$$h = o \; ; \; 2h + k = o \; ; \; k = o \; ; \; l = 1$$

$$a_{x_1 x_2 x_3} = S_3 = a_{x_1 x_2 x_3}$$

(4) $a_{\overline{x_1 x_2 x_3}}^{2} = ?$

$$G_3 = G_2 = 1 \; ; \; G_1 = o$$

$$h = o \; ; \; k = 1 \; ; \; l = -2$$

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3}}^{2} = S_2 - 2S_3$$

(5) $a_{x_1 x_2 x_3}^{[2]} = ?$

$$G_3 = o \; ; \; G_2 = 1 \; ; \; G_1 = o$$

$$h = o \; ; \; k = 1 \; ; \; l = -3$$

$$a_{x_1 x_2 x_3}^{[2]} = S_2 - 3 S_3$$

6) Rente beginnend beim ersten Tod und verdoppelt beim zweiten Tode?

$$G_3 = o \; ; \; G_2 = 1 \; ; \; G_1 = 2$$

$$h = 2 \; ; \; 2h + k = 4 + k = 1 \; ; \; k = -3$$

$$3h + 3k + l = 6 - 9 + l = o \; ; \; l = 3$$

$$a = 2 S_1 - 3 S_2 + 3 S_3$$

Für gleich Alter geht (22) über in:

(23) $$a = \binom{m}{1} h a_\omega + \binom{m}{2} k a_{\omega\omega} + \cdots + \binom{m}{m-1} s a_{[m-1]\omega} + \binom{m}{m} t a_{[m]\omega}$$

Aus (23) folgt speziell für

$$h = 1 \; ; \; k = -1 \; ; \; l = 1 \; ; \; \cdots t \quad (-1)^{m-1}$$

also:

(20) $$a_{[m]\cdot\omega} = \binom{m}{1} a_\omega - \binom{m}{2} a_{\omega\omega} + - \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} a_{[m]\omega}$$

Beispiel:

1. $m = 2$:

$$a_{\omega\omega} = \binom{2}{1} a_\omega - \binom{2}{2} a_{\omega\omega} = 2 a_\omega - a_{\omega\omega}$$

2. $m = 3$:

$$a_{\omega\omega\omega} = \binom{3}{1} a_\omega - \binom{3}{2} a_{\omega\omega} + \binom{3}{3} a_{\omega\omega\omega}$$

$$a_{\omega\omega\omega} = 3 a_\omega - 3 a_{\omega\omega} + a_{\omega\omega\omega}$$

II. Die Verbindungsrenten auf das längste Leben.

A. Herleitung und Bedeutung der allgemeinen Formel.

In dem ersten Teile unserer Untersuchungen über Verbindungsrenten haben wir von ganz allgemeiner Basis ausgehend gezeigt, daß sich alle Verbindungsrenten auf spätern Tod durch lineare Kombination aus Verbindungsrenten auf das kürzeste Leben darstellen lassen. Auf diese Weise haben wir die folgende Formel zur Berechnung der Verbindungsrente auf das längste Leben hergeleitet:

$$(1) \quad a_{x_1 x_2 \cdots x_m} = S_1 - S_2 + S_3 - + \cdots + (-1)^{m-1} S_m$$

dabei ist

$$S_k = \sum_{\binom{m}{k}} a_{x_1 x_2 \cdots x_k}$$

die Summe der Verbindungsrenten auf kürzestes Leben für alle $\binom{m}{k}$ Kombinationen k_{ter} Klasse von m Elementen.

(1) stellt somit den Barwert einer vorschüssigen Rente vom Betrage 1 dar, zahlbar an die Verbindung der m Leben x_1, x_2 .... x_m solange noch ein Ueberlebender aus der Verbindung vorhanden ist.

Für gleiche Alter geht Formel (1) über in:

$$(2) \quad a_{\overline{[m]\omega}} = \binom{m}{1} a_\omega - \binom{m}{2} a_{\omega\omega} + \binom{m}{3} a_{\omega\omega\omega} - + \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} a_{[m]\omega}$$

Diese Verbindungsrenten auf das längste Leben spielen in der Sozialversicherung eine ausgezeichnete Rolle bei der Kapitalisierung von Hinterlassenenrenten. Es sollen daher in diesem zweiten Teile einige Methoden zur Vereinfachung der allgemeinen Formel versucht werden.

B. Versuche zur theoretischen Vereinfachung der allgemeinen Formel.

1. Das Gesetz des gleichmäßigen Alterns.

Bei der technischen Durchführung der Verbindungsrenten auf das kürzeste Leben haben wir festgestellt, daß es möglich ist, Verbindungsrenten, die zu verschiedenen Altern gehören, durch Verbindungsrenten ebenso vieler gleichaltriger Leben darzustellen für den Fall, wo die Sterbetafel der Formel von Makeham oder dem Gaus'schen Fehlergesetz folgt.

(3) $$a_{x_1 x_2 \cdots x_m} = a_{\underbrace{\omega\omega \ldots \omega}_{m}} = a_{[m]\,\omega}$$

Das sogenannte „mittlere Alter" oder Zentralalter ω genügt der Bedingung:

$$c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m} = m\, c^{\omega}$$

oder unter Zuhilfenahme der Intensitäten:

$$\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \cdots + \mu_{x_m} = m\, \mu_{\omega}$$

Dabei müssen wir bedenken, daß dieses Gesetz auf der Annahme beruht, daß die verbundenen Leben gleichwertige Risiken darstellen.

Da für Verbindungsrenten auf das längste Leben

$$a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} \neq a_{\overline{[m] \cdot \omega}}$$

ist, läßt sich offenbar die Differenz bilden:

(4) $$a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} - a_{\overline{[m] \cdot \omega}} = f(x_1 x_2 \cdots x_m)$$

Grieshaber hat nun diese Funktion $f(x_1 x_2 \ldots x_m)$ für zwei Leben untersucht wie folgt:

Die Formeln (1) und (2) lauten für zwei Leben:

(1a) $$a_{\overline{x_1 x_2}} = a_{x_1} + a_{x_2} - a_{x_1 x_2}$$

nach (3) gilt:

(3a) $$a_{x_1 x_2} = a_{\omega\omega}$$

(2a) $$a_{\overline{\omega\omega}} = 2\,a_{\omega} - a_{\omega\omega}$$

somit ergibt sich für die Differenz:

$$a_{\overline{x_1 x_2}} - a_{\overline{\omega\omega}} = a_{x_1} + a_{x_2} - a_{x_1 x_2} - 2\,a_{\omega} + a_{\omega\omega}$$

und unter Berücksichtigung von (3 a):

(5) $$a_{\overline{x_1 x_2}} - a_{\overline{\omega\omega}} = a_{x_1} + a_{x_2} - 2\,a_{\omega} = f(x_1 x_2)$$

Auf Grund des Makeham'schen Gesetzes läßt sich die Funktion $f(x_1 x_2)$ wie folgt darstellen:

(6) $$f(x_1 x_2) = \frac{1}{l_{x_1}} \int_0^{\infty} v^t\, l_{x_1+t}\, dt + \frac{1}{l_{x_2}} \int_0^{\infty} v^t\, l_{x_2+t}\, dt$$

$$- \frac{2}{(l_{x_1} \cdot l_{x_2})^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} v^t\, (l_{x_1+t} \cdot l_{x_2+t})^{\frac{1}{2}}\, dt$$

Dieser Ausdruck kann nun praktisch verwendet werden; denn unter Anwendung der unvollständigen Gammafunktion erhält man eine bequeme, symmetrische Darstellung.

Anmerkung: Das Wesentliche der Methode scheint mir darin zu liegen, daß es gelingt, die Differenz $f(x_1 x_2)$ zweier Verbindungsrenten auf z w e i Leben darzustellen durch eine l i n e a r e Kombination von e i n f a c h e n L e i b r e n t e n.

Wir wollen nun sehen, zu welchen Resultaten die allgemeine Behandlung des Problems auf Grund dieser Methode führt.

Formel (4) läßt sich mit Hilfe von (1) und (2) wie folgt darstellen:

$$f(x_1 x_2 \cdots x_m) = a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} - a_{\overline{[m]\,\omega}}$$

$$= S_1 - S_2 + S_3 - + \cdots + (-1)^{m-1} S_m - \binom{m}{1} a_{\omega} + \binom{m}{2} a_{\omega\omega} -$$

$$+ \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} a_{[m]\,\omega}$$

nach (3) ist:

$$S_m = a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = a_{[m]\,\omega}$$

daraus ergibt sich für unsere Differenz $f(x_1 x_2 \ldots x_m)$:

$$(7) \quad f = S_1 - S_2 + S_3 - + \cdots + (-1)^m S_{m-1} - \binom{m}{1} a_\omega + \binom{m}{2} a_{\omega\omega} - + \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} a_{[m-1]\,\omega}$$

Wir erkennen als Ergebnis, daß es gelungen ist, die Differenz zweier Verbindungsrenten auf längstes Leben von m verbundenen Leben auszudrücken durch eine lineare Kombination von Verbindungsrenten auf kürzestes Leben, wobei als höchste Kombination Verbindungsrenten von $(m-1)$ Leben auftreten, wogegen die Verbindungsrente mit m Leben sich eliminiert hat. Dabei müssen wir aber festhalten, daß die Zahl (Anzahl) der verbundenen Leben $= m$ geblieben ist, nur die Kombination der Leben hat sich auf $(m-1)$ reduziert. Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Berechnung der Differenz $f(x_1 x_2 \ldots x_m)$ im allgemeinen jedenfalls keine wesentliche Vereinfachung zur Berechnung von $a_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ darstellt, indem in $f(x_1 x_2 \ldots x_m)$ selbst bis auf das Glied $S_m - a_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ alle Glieder auftreten, die in der Formel für

$$a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}$$

vorkommen.

Diese Tatsache sei an folgenden zwei Beispielen für $m = 3$ und $m = 4$ des Nähern veranschaulicht:

1. $m = 3$:

$$a_{x_1 x_2 x_3} - a_{\omega\omega\omega} \quad S_1 - S_2 + S_3 - \binom{3}{1} a_\omega + \binom{3}{2} a_{\omega\omega} - \binom{3}{3} a_{\omega\omega\omega}$$
$$= a_{x_1} + a_{x_2} + a_{x_3} - a_{x_1 x_2} - a_{x_1 x_3} - a_{x_2 x_3} + a_{x_1 x_2 x_3}$$
$$- 3\,a_\omega + 3\,a_{\omega\omega} - a_{\omega\omega\omega}$$

es ist: $$a_{x_1 x_2 x_3} = a_{\omega\omega\omega}$$

also:

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3}} - a_{\omega\omega\omega} = a_{x_1} + a_{x_2} + a_{x_3} - a_{x_1 x_2} - a_{x_1 x_3} - a_{x_2 x_3} - 3\,a_\omega + 3\,a_{\omega\omega}$$

2. $m = 4$:

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}} - a_{\overline{\omega\,\omega\,\omega\,\omega}} = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 - \binom{4}{1} a_\omega + \binom{4}{2} a_{\omega\,\omega} - \binom{4}{3} a_{\omega\,\omega\,\omega} + \binom{4}{4} a_{\omega\,\omega\,\omega\,\omega}$$

$$a_{x_1 x_2 x_3 x_4} = a_{\omega\,\omega\,\omega\,\omega}$$

$$a_{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4} - a_{\overline{\omega\,\omega\,\omega\,\omega}} = S_1 - S_2 + S_3 - 4\,a_\omega + 6\,a_{\omega\,\omega} - 4\,a_{\omega\,\omega\,\omega}$$

Die Resultate zeigen eindeutig, daß die Funktion $f(x_1 x_2 \ldots x_m)$ sich im allgemeinen Falle keineswegs einfach berechnen läßt. Es ist also nicht möglich, mit Hilfe dieser Funktion die Berechnungsmethode der Formel für $a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}$ zu vereinfachen, so daß wir die allgemeine Anwendbarkeit der Methode von Grieshaber verneinen müssen.

Es stellt sich noch die Frage, ob (7) als Rekursionsformel anwendbar sei: Auch diese These ist zu verneinen, indem (7) nicht gestattet, von m Leben zurückzuschließen auf (m — 1) Leben, da sich, wie wir schon festgestellt haben, nur die kombinierten Leben auf (m — 1) reduzieren, nicht aber die Anzahl der Leben, die immer = m bleibt.

2. Die Regel von Simpson.

Diese Regel gilt streng, wenn für die ganze Absterbeordnung das Gesetz von Gompertz vorausgesetzt wird.

Diese Formel gestattet nämlich zu m Altern $x_1\, x_2 \ldots x_m$ ein „mittleres" Alter ω so zu bestimmen, daß

$${}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_m} = {}_n p_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2} \cdot \ldots \cdot {}_n p_{x_m} = {}_n p_\omega$$

wird für jedes n; dann gilt aber auch streng;

(8) $a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = a_\omega$ wobei $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_m$

d. h. jede Verbindungsrente auf kürzestes Leben läßt sich durch eine einfache Leibrente ersetzen.

Aus der Formel von Gompertz ergibt sich nämlich:

$$l_x = k\, g^{c^x}$$

$$l_{x+n} = k\, g^{c^{x+n}}$$

und daraus

$${}_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = g^{c^x\,(c^n-1)}$$

oder

$$\text{Log}\ {}_nP_x = c^x\,(c^n - 1)\ \text{Log}\ g$$

damit erhalten wir für

$$\text{Log}\ {}_nP_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \text{Log}\ {}_nP_{x_1} + \text{Log}\ {}_nP_{x_2} + \cdots + \text{Log}\ {}_nP_{x_m}$$

den Wert:

$$\text{Log}\ {}_nP_{x_1 x_2 \ldots x_m} = (c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m})\,(c^n - 1)\ \text{Log}\ g$$

Bestimmt man ω derart, daß

$$c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m} = c^{\omega}$$

so ergibt sich:

$$\text{Log}\ {}_nP_{x_1 x_2 \ldots x_m} = c^{\omega}\,(c^n - 1)\ \text{Log}\ g = \text{Log}\ {}_nP_{\omega}$$

woraus die für jedes n gültige Gleichung folgt:

$${}_nP_{x_1 x_2 \ldots x_m} = {}_nP_{\omega}$$

Die Regel von Simpson kann auch wie folgt verwendet werden:

Anstatt so zu schreiben:

$$a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = a_{\omega}$$

können wir auch nur die beiden Alter x_m und x_{m-1} durch ω ersetzen:

$$a_{\omega} = a_{x_{m-1}\, x_m}$$

so daß wir erhalten:

$$a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = a_{x_1 x_2 \ldots x_{m-2}\, \omega}$$

In dieser Form gestattet uns die Regel von Simpson eine Art Rekursionsformel zur Berechnung von $a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}$ herzuleiten:

Wir finden für $m = 3$:

$$a_{\omega} = a_{x_2 x_3}$$

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3}} = S_1 - S_2 + S_3 = a_{x_1} + a_{x_2} + a_{x_3} - a_{x_1 x_2} - a_{x_1 x_3} - a_{x_2 x_3} + a_{x_1 x_2 x_2}$$

$$= (a_{x_1} + a_{x_2} - a_{x_1 x_2}) + (a_{x_1} + a_{x_3} - a_{x_1 x_3}) - (a_{x_1} + a_{x_2 x_3} - a_{x_1 x_2 x_3})$$

$$= (a_{x_1} + a_{x_2} - a_{x_1 x_2}) + (a_{x_1} + a_{x_3} - a_{x_1 x_3}) - (a_{x_1} + a_{\omega} - a_{x_1 \omega})$$

also:

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3}} = a_{\overline{x_1 x_2}} + a_{\overline{x_1 x_3}} - a_{\overline{x_1 \omega}}$$

$m = 4$:

$$a_{\omega} = a_{x_3 x_4}$$

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}} = a_{x_1} + a_{x_2} + a_{x_3} + a_{x_4} - a_{x_1 x_2} - a_{x_1 x_3} - a_{x_1 x_4} - a_{x_2 x_3} - a_{x_2 x_4}$$
$$- a_{x_3 x_4} + a_{x_1 x_2 x_3} + a_{x_1 x_2 x_4} + a_{x_1 x_3 x_4} + a_{x_2 x_3 x_4} - a_{x_1 x_2 x_3 x_4}$$
$$= (a_{x_1} + a_{x_2} + a_{x_3} - a_{x_1 x_2} - a_{x_1 x_3} - a_{x_2 x_3} + a_{x_1 x_2 x_3})$$
$$+ (a_{x_1} + a_{x_2} + a_{x_4} - a_{x_1 x_2} - a_{x_1 x_4} - a_{x_2 x_4} + a_{x_1 x_2 x_4})$$
$$- (a_{x_1} + a_{x_2} + a_{x_3 x_4} - a_{x_1 x_2} - a_{x_1 x_3 x_4} - a_{x_2 x_3 x_4} + a_{x_1 x_2 x_3 x_4})$$
$$= a_{\overline{x_1 x_2 x_3}}$$
$$+ a_{\overline{x_1 x_2 x_4}}$$
$$- (a_{x_1} + a_{x_2} + a_{\omega} - a_{x_1 x_2} - a_{x_1 \omega} - a_{x_2 \omega} + a_{x_1 x_2 \omega})$$

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}} = a_{\overline{x_1 x_2 x_3}} + a_{\overline{x_1 x_2 x_4}} - a_{\overline{x_1 x_2 w}}$$

analog ergibt sich für $m = 5$: $a_{\omega} = a_{x_4 x_5}$

$$a_{\overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}} = a_{\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}} + a_{\overline{x_1 x_2 x_3 x_5}} - a_{\overline{x_1 x_2 x_3 \omega}}$$

Verallgemeinert erhalten wir die Rekursionsformel:

(9)

$$a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_{m-1} x_m}} = a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_{m-1}}} + a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_{m-2} x_m}} - a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_{m-2} \omega}}$$

wobei gilt

$$a_{\omega} = a_{x_{m-1} x_m}$$

Diese Formel gilt streng für das Gesetz von Gompertz. Da dieses Gesetz das wirkliche Gesetz des Sterbens (Absterbeordnung) viel genauer darstellt für höhere Alter als für niedrige, so wird praktisch der Fehler in der Barwertbestimmung um so kleiner sein, je höher die einzelnen Alter sind.

3. Anwendung des Makeham'schen Gesetzes zur Berechnung einfacher Verbindungsrenten und die Prymschen Funktionen.

Im ersten Teil der Untersuchungen über Verbindungsrenten haben wir für die einfache Verbindungsrente die allgemein gültige Formel gefunden:

$$(10) \qquad a_{x_1 x_2 \cdots x_m} = \sum_{n=0}^{\sigma-1} v^n \, {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m}$$

Für die kontinuierliche Betrachtungsweise geht (10) über in:

$$(11) \qquad a_{x_1 x_2 \cdots x_m} = \int_0^{\sigma} v^n \, {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m} \, d\,n$$

unter Voraussetzung der Unabhängigkeit der einzelnen Leben gilt:

$$(12) \qquad {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m} = {}_n p_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2} \cdots {}_n p_{x_m} = \frac{x_m}{s = x_1} {}_n p_s$$

Mit Hilfe des Intensitätsbegriffes ist allgemein definiert:

$${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+\Theta} \, d\,\Theta}$$

so daß (12) dargestellt werden kann:

$${}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m} = \frac{x_m}{s = x_1} {}_n p_s = e^{-\int_0^n (\mu_{x_1+\Theta} + \mu_{x_2+\Theta} + \cdots + \mu_{x_m+\Theta}) \, d\,\Theta}$$

oder:

$$(13) \qquad {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m} = e^{-\int_0^n \sum_{s=x_1}^{x_m} \mu_{s+\Theta} \, d\,\Theta}$$

In kontinuierlicher Darstellung ergibt sich ferner:

$$v^n = e^{-\delta n}$$

und somit:

$$v^n {}_n p_{x_1 x_2 \cdots x_m} = e^{-\int_0^n (\delta + \sum \mu_{s+\Theta})\, d\Theta}$$

dann geht (11) über in:

$$(14) \qquad \bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_m} = \int_{n=0}^{n=\sigma} e^{-\int_0^n (\delta + \sum_{s=x_1}^{x_m} \mu_{s+\Theta}\, d\Theta}\, dn$$

Berechnung von (14) für das Makehamsche Gesetz:
Wir setzen:

$$A = \operatorname{Log} \frac{1}{s}$$

$$B = \operatorname{Log} c \cdot \operatorname{Log} \frac{1}{g}$$

dann ergibt sich für die Intensitäten:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{x_1} &= A + B\, c^{x_1} \\ \mu_{x_2} &= A + B\, c^{x_2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{x_m} &= A + B\, c^{x_m} \end{aligned}\right\} \text{ m Gleichungen.}$$

$$\sum_{s=x_1}^{x_m} \mu_{s+\Theta} = m\,A + B\,c^{\Theta}\,(c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m})$$

$$\delta + \sum = m\,A + \delta + B\,c^{\Theta}\,(c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m})$$

$$\int_{\Theta=0}^{n} \left(\delta + \sum_{\Theta=n}\right) d\,\Theta = (mA + \delta)\,\Theta + \frac{B\,c^{\Theta}}{\text{Log } c}\,(c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m}) \Big|_{\Theta=0} - (mA + \delta)\,n + \text{Log}\frac{1}{g}\,(c^{x_1} \cdot c^{x_2} \cdots + c^{x_m})\,(c^{n} - 1)$$

Wir führen weiter ein

$$\text{Log}\,\frac{1}{g}\,c^{x_1} = \lambda_{x_1}$$

$$\text{Log}\,\frac{1}{g}\,c^{x_2} = \lambda_{x_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{Log}\,\frac{1}{g}\,c^{x_m} = \lambda_{x_m}$$

(15) $$\text{Log}\,\frac{1}{g}\,(c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m}) = \lambda_{x_1} + \lambda_{x_2} + \cdots + \lambda_{x_m} = A$$

für das Makehamsche Gesetz gilt nun

$$c^{x_1} \cdot c^{x_2} \cdots c^{x_m} = m\,c^{\omega}$$

so daß wir haben:

(15a) $$A = m\ \text{Log}\,\frac{1}{g}\,c^{\omega} = m\ \lambda_{\omega}$$

Für die Gleichung (14) erhalten wir damit den endgültigen Wert:

(16) $$\bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_m} = e^{A} \int_{0}^{\infty} e^{-(mA+\delta)n}\ e^{-A\,c^{n}}\,dn$$

Die obere Grenze σ wird $= \infty$ bei asymtotischem Verlauf der Funktionen $l_{x_1}, l_{x_2} \ldots l_{x_m}$. Dies ist zutreffend für das Makehamsche Gesetz, daher ist die obere Grenze σ in ∞ übergegangen.

Für die Leibrente auf 1 Leben ergibt sich:

$$(17) \qquad \bar{a}_x = e^{\lambda_x} \int_0^{\infty} e^{-(A+\delta)n} \, e^{-\lambda_x c^n} \, dn$$

Zur Einführung der Prymschen Funktion gehen wir aus von Gleichung (16) und setzen:

$$(18) \qquad A c^n = u$$

Wir erhalten dann für die Grenzen des Integrals:

n	u
o	A
∞	∞

$$du = A c^n \operatorname{Log} c \, dn \quad ; \quad dn = \frac{du}{u \operatorname{Log} c}$$

$$c^n = \frac{u}{A} \; ; \; n \cdot \operatorname{Log} c = \operatorname{Log}\left(\frac{u}{A}\right) \; ; \; n = \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{u}{A}\right)}{\operatorname{Log} c}$$

Setzen wir diese Größen in (16) ein, so erhalten wir:

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_m} = e^{A} \int_A^{\infty} e^{-(mA+\delta)} \, \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{u}{A}\right)}{\operatorname{Log} c} \, e^{-u} \cdot \frac{du}{u \cdot \operatorname{Log} c}$$

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_m} = \frac{e^{A}}{\operatorname{Log} c} \int_A^{\infty} e^{-\frac{mA+\delta}{\operatorname{Log} c} \operatorname{Log}\left(\frac{u}{A}\right)} \, e^{-u} \, \frac{du}{u}$$

setzen wir $\quad -\dfrac{mA+\delta}{\operatorname{Log} c} = K$, so ergibt sich:

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_m} = \frac{e^{A}}{\text{Log } c} \int_{A}^{\infty} e^{K \text{ Log } \left(\frac{u}{A}\right)} e^{-u} \frac{du}{u}$$

$$= \frac{e^{A}}{\text{Log } c} \int_{A}^{\infty} \left(\frac{u}{A}\right)^{K} \cdot \frac{1}{u} e^{-u} du$$

$$(19) \qquad \bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_m} = \frac{e^{A}}{A^{K} \text{ Log } c} \int_{A}^{\infty} e^{-u} u^{K-1} du$$

Es ist nun:

$$\int_{A}^{\infty} e^{-u} u^{K-1} du = Q\ (A,\ K)$$

also:

$$(20) \qquad a_{x_1 x_2 \cdots x_m} = \frac{e^{A}\ Q\ (A,\ K)}{A^{K} \text{ Log } c}$$

Für die Leibrente auf ein Leben ergibt sich entsprechend:

$$(21) \qquad \bar{a}_x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda_x^{k} \text{ Log } c} \int_{\lambda x}^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda_x^{k} \text{ Log } c} Q\ (\lambda_x, k)$$

wobei

$$k = -\frac{A + \delta}{\text{Log } c} \text{ und } Q\ (\lambda x\ ,\ k) = \int_{\lambda x}^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du$$

so daß folgende Uebersicht sich ergibt:

Leibrente $\bar{a}_x$	Verb. Rente $\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$
$A + \delta$	$m A + \delta$
$k = -\frac{A + \delta}{\text{Log } c}$	$K = -\frac{m A + \delta}{\text{Log } c}$
$\lambda_x = \text{Log } \frac{1}{g} c^x$	$\Lambda = \lambda_{x_1} + \lambda_{x_2} + \ldots + \lambda_{x_m}$
$Q(\lambda_x, k) = \int_{\lambda_x}^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du$	$Q(\Lambda, K) = \int_{\Lambda}^{\infty} e^{-u} u^{K-1} du$
$u = \lambda_x c^n$	$u = \Lambda c^n$

Gleichung (20) können wir in folgende symb. Form bringen:

$$(22) \qquad a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \frac{F(\Lambda, K)}{\text{Log } c}$$

wobei

$$F(\Lambda, K) = \frac{e^{\Lambda} Q(\Lambda, K)}{\Lambda^K}$$

Die Funktion $F(\Lambda, K)$ wird Prymsche Funktion genannt. Sie wurde von Dr. Thalmann berechnet und tabuliert, so daß sich also mit Hilfe von Formel (22) die einfachen Verbindungsrenten, sowie auch die einfachen Leibrenten auf ein Leben sehr leicht berechnen lassen.

Wir fügen hier noch eine prinzipielle Betrachtung an, die auch Anstoß gegeben hat zu den weiteren Untersuchungen über Verbindungsrenten auf das längste Leben.

Wir untersuchen die Bedeutung unserer Beziehung (15):

$$(15) \quad \text{Log } \frac{1}{g} (c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_m}) = \lambda_{x_1} + \lambda_{x_2} + \ldots + \lambda_{x_m} = \Lambda .$$

da aber $\qquad c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_m} = m c^{\omega}$

gilt auch

$$(15a)\quad \operatorname{Log}\frac{1}{g}\,(c^{x_1}+c^{x_2}+\ldots+c^{x_m})=m\operatorname{Log}\frac{1}{g}\,c^{\omega}=m\lambda_{\omega}=\Lambda$$

Die Beziehung (15a) besagt anders ausgedrückt die uns aus dem ersten Teile bekannte Beziehung:

$$a_{x_1 x_2 \ldots x_m}=a_{[m]\,.\,\omega}$$

Vergleichen wir die Struktur von (20) und 21)

$$(20)\qquad \bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m}=\frac{e^{\Lambda}\,Q(\Lambda,K)}{\Lambda^{K}\operatorname{Log} c}$$

$$(21)\qquad \bar{a}_{x}=\frac{e^{\lambda_x}\,Q(\lambda_x,k)}{\lambda_x{}^{k}\operatorname{Log} c}$$

so sehen wir, daß das Λ formal dieselbe Rolle spielt, wie ein λ_x. Auch in der Tabelle der Prymschen Funktionen tritt dieses Λ zahlenmäßig unter den λ_x auf. Dasselbe gilt in Bezug auf die K und die k.

Entsprechend der Relation

$$\Lambda=\lambda_{x_1}+\lambda_{x_2}+\ldots+\lambda_{x_m}=m\lambda_{\omega}$$

können wir auch eine Beziehung herleiten für die "K".

Es gilt

$$k=-\frac{A+\delta}{\operatorname{Log} c}\;;\;K=-\frac{mA+\delta}{\operatorname{Log} c}$$

Also

$$K=-\frac{mA+\delta}{\operatorname{Log} c}=-m\,\frac{A+\frac{\delta}{m}}{\operatorname{Log} c}=-m\,\frac{A+\vartheta}{\operatorname{Log} c}=-m\,k_{\vartheta}$$

wobei

$$\vartheta=\frac{\delta}{m}$$

Durch Einführung des Zentralalters ω und durch Anpassung des Zinsfußes wird es demnach möglich sein, den Barwert der

Rente $a_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ darzustellen durch einen einzigen Barwert $\bar{a}_x$ der einem A und K in der Tabelle der Prymschen Funktion zugeordnet ist.

Aus der formalen Uebereinstimmung von (20) und (21) ergibt sich somit die Beziehung:

$$(22) \qquad \bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \frac{e^A Q\ (A, K)}{A^K \operatorname{Log} c} = \bar{a}_x$$

d. h. unter Anwendung der Prymschen Funktion läßt sich jede einfache Verbindungsrente auf eine Leibrente für ein Leben zurückführen.

4. Anwendung der Prymschen Funktionen zur Berechnung von Verbindungsrenten auf das längste Leben.

Es stellt sich nun die allgemeine Frage, ob es im Anschluß an die Beziehung (22) nicht möglich sei, überhaupt jede Rente darzustellen durch eine einfache Leibrente, so daß auch für die Verbindungsrente auf das längste Leben eine Relation möglich wäre:

$$(23) \qquad a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = a_x$$

Im Folgenden stellen wir nun Beziehung (23) als Hypothese hin und wollen untersuchen, was sich hieraus für Bedingungen ergeben für die Erfüllung unseres Problems.

Wir erinnern an die allgemeine Formel:

$$(1) \qquad a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = S_1 - S_2 + S_3 - + \ldots + (-1)^{m-1} S_m$$

wobei

$$S_k = \sum_{\binom{m}{k}} a_{x_1 x_2 \ldots x_k}$$

die Summe der Verbindungsrenten auf kürzestes Leben für alle

$\binom{m}{k}$ Kombinationen k^{ter} Klasse von m Elementen darstellt.

Aus (16) entnehmen wir:

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_k} = e^{A \int_0^\infty e^{-(kA+\delta)t} e^{-Ac^t} dt}$$

Somit erhalten wir für S_k:

$$S_k = \sum_{\binom{m}{k}} \bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_k} = \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} e^{A_\nu \int_0^\infty e^{-(kA+\delta)t} e^{-A_\nu c^t} dt}$$

oder:

$$(24) \qquad S_k = \int_0^\infty e^{-(kA+\delta)t} \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} e^{A_\nu} \cdot e^{-A_\nu c^t} dt$$

Wir untersuchen die Summe unter dem Integral und setzen:

$$\sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} e^{A_\nu} e^{-A_\nu c^t} = \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} e^{-A_\nu (c^t - 1)} = \binom{m}{k} e^{A(c^t-1)}$$

in der Beziehung (24) eingeführt erhalten wir:

$$S_k = \binom{m}{k} \int_0^\infty e^{-(kA+\delta)t} e^{A} \cdot e^{-Ac^t} dt$$

$$(26) \qquad S_k = \binom{m}{k} e^{A \int_0^\infty e^{-(kA+\delta)t} e^{-Ac^t} dt}$$

für diesen Wert ergibt sich nach (16) der Barwert einer einfachen Verbindungsrente auf k verbundene Leben:

$$(26a) \qquad S_k = \sum_{\binom{m}{k}} \bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_k} = \binom{m}{k} \underbrace{\bar{a}_{x_a x_b \cdots x_p}}_{k}$$

Diese Beziehung ist aber nur gültig unter der folgenden Bedingung für unser allgemeines A:

$$(27) \qquad \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} e^{-\lambda_\nu (c^t - 1)} = \binom{m}{k} e^{-A (c^t - 1)}$$

diese Beziehung soll erfüllt sein für alle t von 0 bis ∞

Die Untersuchung dieser Bedingung wird Aufgabe eines Spezialkapitels sein.

Wir geben nur noch einige Hinweise, die für die nähere Untersuchung wegleitend sein können.

Explizite geschrieben lautet (27):

$$(27a) \qquad e^{-A_1 (c^t - 1)} + e^{-A_2 (c^t - 1)} + \ldots + e^{-A \binom{m}{k} (c^t - 1)} = \binom{m}{k} e^{-A (c^t - 1)}$$

für alle t von 0 bis ∞

1. k ist nur abhängig von der Anzahl verbundener Leben, also positiv ganz

2. $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{\binom{m}{k}}$ sind für eine bestimmte Rente konstante Grössen, abhängig von Alter und Anzahl der verbundenen Leben im Bereiche.

$$0 < \lambda_\nu < 10$$

3. c: die Konstante c des Makeham'schen Gesetzes.

$$2 > c > 1$$

4. t: die Zeit varierend von 0 bis ∞

Zu bestimmen ist aus der Funktionalgleichung (27 a) das A als Funktion der λ_ν und von t.

Wir wollen noch festhalten, daß die Reihenentwicklung der

Exponentialfunktion hier nicht anwendbar ist, da die Konvergenzbedingung für $t = \infty$ nicht mehr erfüllt ist.

Unter der Bedingung (27) und mit Hilfe von (26 a) können wir unseren Barwert wie folgt darstellen:

$$(28)\quad a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} S_k = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} \bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_k}$$

Verwenden wir Gleichung (26), so können wir (28) auch schreiben:

$$(29)\quad \bar{a}_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} S_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \int_0^{\infty} \binom{m}{k} e^{-(kA+\delta)t} \cdot e^{A_k (c^t - 1)} dt$$

oder

$$(29a)\quad \bar{a}_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} e^{-kAt} e^{A_k (c^t - 1)} dt$$

Wir untersuchen die Summe und setzen:

$$(30)\quad \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} e^{-\left[kAt + A_k (c^t - 1)\right]} = e^{-\left[\varkappa At + A_\varkappa (c^t - 1)\right]}$$

dann können wir das Integral (29 a) schreiben:

$$\bar{a}_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-\varkappa At} e^{-A_\varkappa (c^t - 1)} dt$$

oder

$$(31)\quad a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = e^{I_\varkappa} \int_0^{\infty} e^{-(\varkappa A + \delta)t} \cdot e^{-A_\varkappa c^t} dt = a_{x_1 x_2 \cdots x_\varkappa}$$

Diese Relation gestattet also, den Barwert einer Verbindungsrente auf das längste Leben darzustellen durch eine einfache Verbindungsrente auf das kürzeste Leben. Diese Ueberführung ist aber nur möglich unter der Bedingung (30):

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} e^{-\left[kAt + A_k (c^t - 1)\right]} = e^{-\left[\varkappa At + A_\varkappa (c^t - 1)\right]}$$

oder explizite:

(30a) $$\binom{m}{1} e^{-\left[At + A_1 (c^t - 1)\right]} - \binom{m}{2} e^{-\left[2At + A_2 (c^t - 1)\right]} + - \ldots = e^{-\left[\varkappa At + A_\varkappa (c^t - 1)\right]}$$

für alle t von o bis ∞

Auch die Untersuchung dieser Bedingung wird Aufgabe einer Spezialuntersuchung sein. Als weitere Anmerkungen können hier dieselben Hinweise gelten wie zu (27 a).

Im Anschluß an die Untersuchung von (27 a) wird die Lösung dieser Bedingung keine großen Schwierigkeiten mehr bereiten.

Die Darstellung mit Prymschen Funktionen.

Führen wir in unserer Formel (1):

(1) $$a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = S_1 - S_2 + S_3 - + \ldots + (-1)^{m-1} S_m$$

für die einfachen Leibrenten die Prymschen Funktionen ein:

(20, 22) $$\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_k} = \frac{e^{AQ(A, K)}}{A^K \operatorname{Log} c} = \frac{1}{\operatorname{Log} c} F(A, K)$$

so erhalten wir für:

(33) $$S_k = g F(A_1, K) + g F(A_2, K) + \ldots + g F\left(A_{\binom{m}{k}}, K\right) = \binom{m}{k} g F(A, K)$$

$$\text{wobei} \quad g = \frac{1}{\operatorname{Log} c}$$

K ist nur abhängig von der Anzahl kombinierter Leben, wird also in S_k immer den gleichen Wert annehmen.

Wir fragen uns nun, ob sich S_k nicht durch eine einzige Prymsche Funktion darstellen lasse, derart, daß

$$(34)\quad S_k = gF(\Lambda_1, K) + gF(\Lambda_2, K) + \ldots + gF(\Lambda_{\binom{m}{k}}, K) = \binom{m}{k} gF(\Lambda K)$$

Wir gehen aus von (33) und schreiben:

$$S_k = g \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} F(\Lambda_\nu, K) = \frac{1}{\operatorname{Log} c} \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} \frac{e^{\Lambda_\nu}}{\Lambda_\nu^K} Q(\Lambda_\nu, K)$$

oder

$$(35)\quad S_k = \frac{1}{\operatorname{Log} c} \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} \frac{e^{\Lambda_\nu}}{\Lambda_\nu^K} \int_{\Lambda_\nu}^{\infty} e^{-u}\, u^{K-1}\, du$$

Wir setzen

$$(36)\quad u = v + \Lambda_\nu$$

also

$$S_k = \frac{1}{\operatorname{Log} c} \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} \frac{e^{\Lambda_\nu}}{\Lambda_\nu^K} \int_0^{\infty} e^{-(v+\Lambda_\nu)} (v+\Lambda_\nu)^{K-1}\, dv$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Log} c} \int_0^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} \frac{(v+\Lambda_\nu)^{K-1}}{\Lambda_\nu^K} e^{-v}\, dv$$

Wir stellen die Bedingung:

$$(37)\quad \sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} \frac{(v+\Lambda_\nu)^{K-1}}{\Lambda_\nu^K} = \binom{m}{k} \frac{(v+\Lambda)^{K-1}}{\Lambda^K}$$

dann erhalten wir:

$$S_k = \binom{m}{k} \frac{1}{\operatorname{Log} c} \int_0^{\infty} \frac{(v+\Lambda)^{K-1}}{\Lambda^K} e^{-v}\, dv$$

Unter Berücksichtigung von (36):

$$S_k = \binom{m}{k} \frac{1}{\text{Log } c} \int_{\Lambda}^{\infty} \frac{e^{-(u-\Lambda)}}{\Lambda^K} u^{K-1} du$$

$$= \binom{m}{k} \frac{e^{\Lambda}}{\Lambda^K \text{Log } c} \int_{\Lambda}^{\infty} e^{-u} u^{K-1} du = \binom{m}{k} \frac{e^{\Lambda} Q(\Lambda, K)}{\Lambda^K \text{Log } c}$$

oder:

$$S_k = \binom{m}{k} \frac{1}{\text{Log } c} F(\Lambda, K) \tag{34}$$

Es ist also allgemein:

$$S_k = g F(\Lambda_1 K) + g F(\Lambda_2 K) + \cdots + g F(\Lambda_{\binom{m}{k}} K) \tag{34}$$

$$= \binom{m}{k} g F(\Lambda, K)$$

unter der Bedingung:

$$\sum_{\nu=1}^{\binom{m}{k}} \frac{(\nu + \Lambda\nu)^{K-1}}{\Lambda\nu^K} = \binom{m}{k} \frac{(\nu - \Lambda)^{K-1}}{\Lambda^K} \tag{37}$$

d. h. unter der Bedingung (37) wird es möglich sein, S_k durch eine einzige Prymsche Funktion darzustellen.

Damit würde sich dann der Barwert einer Verbindungsrente auf das längste Leben ergeben als Summe solcher Prymscher Funktionen:

$$a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \frac{1}{\text{Log } c} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} F(\Lambda_k, K) \tag{38}$$

Die weitere Besprechung der Bedingung (37) ist Aufgabe einer Spezialuntersuchung, deren Ergebnis für die ganze hier gegebene Theorie von ausschlaggebender Bedeutung ist.

5. *Darstellung mit Hilfe von Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten und Intensitätsfunktionen.*

Als Ausgangspunkt für unsere bisherige Darstellung der Verbindungsrente auf das längste Leben diente die Ueberlebenswahrscheinlichkeit, ${}_nP_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, daß von m Individuen mindestens eines nach n Jahren noch lebt. Diese Wahrscheinlichkeit haben wir symbolisch dargestellt durch:

$$(39) \quad {}_nP_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = Z_1 - Z_2 + Z_3 - + \ldots + (-1)^{m-1} Z_m$$

wobei das Symbol

$$Z_k = \sum_{\binom{m}{k}} {}_nP_{x_1 x_2 \ldots x_k}$$

die Summe aller einfachen Ueberlebenswahrscheinlichkeiten der $\binom{m}{k}$ Kombinationen kter Klasse von m Leben bedeutet.

Um uns genau Rechenschaft zu geben über die vielen Kombinationsmöglichkeiten vom Leben und Sterben bei m verbundenen Individuen, wollen wir die diesbezüglichen Wahrscheinlichkeiten in einem besonderen Wahrscheinlichkeitsschema zusammenstellen. Diese Betrachtungsweise wird uns dann zu einer neuen Darstellung der Ueberlebenswahrscheinlichkeit ${}_nP_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}}$ führen.

(40)

Zeile a	${}_nP_{x_1} \cdot {}_nP_{x_2} \cdot \ldots \cdot {}_nP_{x_m}$
b	${}_nP_{x_1} \cdot {}_nP_{x_2} \cdot \ldots \cdot {}_nP_{x_{m-1}} \cdot {}_nq_{x_m}$
	- - -

g $\quad {}_nP_{x_1} \cdot {}_nq_{x_2} \cdot {}_nq_{x_3} \cdot \ldots \cdot {}_nq_{x_{m-1}} \cdot {}_nq_{x_m}$

$\quad -$

h $\quad {}_nq_{x_1} \cdot {}_nq_{x_2} \cdot {}_nq_{x_3} \cdot \ldots \cdot {}_nq_{x_{m-1}} \cdot {}_nP_{x_m}$

i $\quad {}_nq_{x_1} \cdot {}_nq_{x_2} \cdot {}_nq_{x_3} \cdot \ldots \cdot {}_nq_{x_{m-1}} \cdot {}_nq_{x_m}$

In diesem Schema stellt jede Zeile eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dar.

Zeile a: Wahrscheinlichkeit ${}_nP_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, daß von den m Individuen nach n Jahren noch alle am Leben sind.

Zeile b: Wahrscheinlichkeit ${}_nP^{[x_1 x_2 \ldots x_{m-1}]}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, daß von den m Individuen die (m - 1) bestimmten $x_1 x_2 \ldots x_{m-1}$ noch am Leben sind, während das bestimmte Individuum x_m gestorben ist.

Zeile c: Wahrscheinlichkeit ${}_nP^{[x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_m]}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ daß von den m Individuen alle bis auf das Individuum x_i noch leben.

Analog kann auch jede andere Zeile gedeutet werden.

Wir erhalten entsprechend weitere bestimmte Wahrscheinlichkeiten, wenn wir einzelne Zeilen durch Addition verbinden. So bedeutet z. B.

b + ... + c + ... + d

die Wahrscheinlichkeit ${}_nP^{[m-1]}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$, daß von den m Individuen nach n Jahren gerade noch (m - 1) am Leben sind.

Addieren wir hierzu auch noch Zeile a, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$${}_nP^{(m-1)}_{x_1 x_2 \ldots x_m}$$

daß nach n Jahren mindestens noch (m - 1) Individuen am Leben sind. Addieren wir alle Zeilen, ohne die letzte, so erhalten wir unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit

$${}_nP_{x_1 x_2 \ldots x_m}$$

daß nach n Jahren von den m Individuen mindestens noch ein

Individuum am Leben ist. Da das Schema alle möglichen Wahrscheinlichkeiten, die auftreten können, enthält, so stellt offenbar die Summe aller Zeilen die Sicherheit 1 dar.

Aus diesem Schema ergibt sich aber auch ohne weiteres die Relation:

(41) $$ {}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = 1 - {}_n q_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2} \cdot \ldots \cdot {}_n q_{x_m} $$

$$ = 1 - {}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} $$

Beziehung (41) können wir mit folgender Ueberlegung bestätigen:

Es ist gewiß, daß aus einer Verbindung von m Leben nach n Jahren entweder keine Person mehr am Leben ist, (Wahrscheinlichkeit Q), oder daß mindestens eine Person noch lebt, (Wahrscheinlichkeit P),

d. f.:

(42) $$ P + Q = 1 $$

oder $$ P = 1 - Q $$

Die Wahrscheinlichkeit Q, daß nach n Jahren keine der m Personen mehr lebt, ist aber dargestellt durch

(43) $$ Q = {}_n q_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2} \cdot \ldots \cdot {}_n q_{x_m} $$

so daß (42) übergeht in:

(44) $$ P = 1 - {}_n q_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2} \cdot \ldots \cdot {}_n q_{x_m} = 1 - {}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} $$

P entspricht aber genau unserer gesuchten Wahrscheinlichkeit:

$$ {}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = 1 - {}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} $$

womit (41) bestätigt ist.

Für zwei verbundene Leben x_1 und x_2 ergibt sich speziell:

$$ {}_n p_{\overline{x_1 x_2}} \left\{ \begin{array}{l} {}_n p_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2} \\ {}_n p_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2} \\ {}_n q_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2} \\ {}_n q_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2} \end{array} \right\} 1 $$

$$ {}_n p_{\overline{x_1 x_2}} = {}_n p_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2} + {}_n q_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2} $$

$$ = {}_n p_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_1} (1 - {}_n p_{x_2}) + {}_n p_{x_2} (1 - {}_n p_{x_1}) $$

$$ = {}_n p_{x_1} \cdot {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_1} - {}_n p_{x_1} {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_2} - {}_n p_{x_1} {}_n p_{x_2} $$

$${}_n p_{\overline{x_1 x_2}} = {}_n p_{x_1} + {}_n p_{x_2} - {}_n p_{x_1 x_2} = 1 - {}_n q_{x_1 x_2}$$

Die einfache Produktdarstellung (41) läßt die Vermutung zu, daß die Wahrscheinlichkeit ${}_n p_{x_1 x_2 \ldots \overline{x_m}}$ mit Sterbewahrscheinlichkeiten einfacher zu ermitteln sei als mit der komplizierten Kombination aus Ueberlebenswahrscheinlichkeiten.

Für den Barwert der Verbindungsrente auf das längste Leben erhalten wir den Ansatz:

$$(45) \quad a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \int_{t=o}^{\sigma} v^t \, {}_t p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} \, dt$$

$$= \int_{t=o}^{\sigma} v^t \, (1 - {}_t q_{x_1 x_2 \ldots x_m}) \, dt$$

oder

$$(46) \quad a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \underbrace{\int_o^{\sigma} v^t dt}_{\text{I}} - \underbrace{\int_o^{\sigma} v^t \, {}_t q_{x_1 x_2 \ldots x_m} \, dt}_{\text{II}}$$

I.

$$\int_o^{\sigma} v^t \, dt = \int_o^{\sigma} e^{-\delta t} \, dt$$

II. Mit Hilfe der Sterbeintensität μ können wir die Wahrscheinlichkeiten ausdrücken durch:

$${}_t q_{x_1} = \int_{\tau=o}^{t} {}_\tau p_{x_1} \, \mu_{x_1 + \tau} \, d\tau$$

oder

$${}_t q_{x_1} = \int_{\tau=o}^{t} \mu_{x_1 + \tau} \, e^{-\int_o^{\tau} \mu_{x_1 + \Theta} \, d\Theta} \, d\tau$$

$$ {}_t q_{x_2} = \int_{\tau=0}^{t} \mu_{x_2+\tau}\, e^{-\int_0^{\tau} \mu_{x_2+\theta}\, d\theta}\, d\tau $$

. . . . . .

$$ {}_t q_{x_m} = \int_{0}^{t} \mu_{x_m+\tau}\, e^{-\int_0^{\tau} \mu_{x_m+\theta}\, d\theta}\, d\tau $$

$$ {}_t q_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \prod_{S=1}^{m} {}_t q_{x_S} = \prod_{S=1}^{m} \int_{\tau=0}^{t} \mu_{x_S+\tau}\, e^{-\int_0^{\tau} \mu_{x_S+\theta}\, d\theta}\, d\tau $$

Damit geht (46) über in

$$ (47)\quad a_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t}\, dt $$

$$ - \int_{t}^{\infty} e^{-\delta t} \prod_{S=1}^{m} \int_{\tau=0}^{t} \mu_{x_S+\tau}\, e^{-\int_{\theta=0}^{\tau} \mu_{x_S+\theta}\, d\theta}\, d\tau\, dt $$

Die weitere theoretische Lösung dieser Beziehung ist schwerfällig und auch die praktische Auswertung kann nicht ohne weiteres geschehen. Die Lösung des Problems mit Hilfe der Sterbeintensität wird also kaum zum Ziele führen.

Wir versuchen daher eine einfachere Darstellung der Sterbewahrscheinlichkeit ${}_t q_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ durch den Ansatz:

$$ (48)\quad {}_t q_x = e^{-\int_0^{t} \nu_{x+\tau}\, d\tau} $$

ν_x stelle dabei die Intensität einer fiktiven Ordnung n_x dar. Da-

mit erhalten wir für II die Darstellung:

$$ {}_tq_{x_1} = e^{-\int_0^t v_{x_1+\tau}\,d\tau} $$

$$ {}_tq_{x_2} = e^{-\int_0^t v_{x_2+\tau}\,d\tau} $$

. . . . . .

$$ {}_tq_{x_m} = e^{-\int_0^t v_{x_m+\tau}\,d\tau} $$

$$ {}_tq_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \prod_{S=1}^{m} {}_tq_{x_s} = e^{-\int_0^t \left(v_{x_1+\tau}+v_{x_2+\tau}+\ldots+v_{x_m+\tau}\right) d\tau} $$

$$ = e^{-\int_0^t \sum_{S=1}^{m} v_{x_s+\tau}\,d\tau} $$

Damit ergibt sich weiter:

$$ v^t\,{}_tq_{x_1 x_2 \ldots x_m} = e^{-\int_0^t \left(\delta+\sum_{s=1} v_{x_s+\tau}\right) d\tau} $$

und der gesamte Barwert wird dargestellt durch:

$$ (49) \quad a_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \int_0^{\sigma} e^{-\delta t}\,dt - \int_0^{\sigma} e^{-\int_0^t \left(\delta+\sum_{S=1}^{m} v_{x_s+\tau}\right) d\tau}\,dt $$

Falls die fiktive Ordnung durch das Makeham'sche Gesetz oder die Gauß'sche Fehlerfunktion dargestellt werden kann, wird es möglich sein, die Summe der Intensitätsfunktionen $\sum_{s=1}^{m} \nu_{x_s}$ durch eine einzige Intensitätsfunktion zu ersetzen, womit dann das Gesetz des gleichmäßigen Alterns auch für Verbindungsrenten auf das längste Leben anwendbar wäre.

Wir gehen nun weiter zur Bildung der fiktiven Ordnung n_x und der Intensitätsfunktion ν_x.

Nach der allgemeinen Definition für die Intensität haben wir:

$$\nu_\tau = -\frac{d}{d\tau} \operatorname{Log} \frac{1}{n_\tau} \tag{50}$$

oder

$$-\nu_\tau \, d\tau = d \operatorname{Log} n_\tau$$

$$-\int_x^{x+1} \nu_\tau \, d_\tau = \operatorname{Log} n_\tau \Big|_x^{x+1} = \operatorname{Log} n_{x+1} - \operatorname{Log} n_x = \operatorname{Log} \frac{n_{x+1}}{n_x}$$

daraus ergibt sich:

$$\frac{n_{x+1}}{n_x} = e^{-\int_x^{x+1} \nu_\tau \, d\tau} \tag{51}$$

nach (48) ist aber

$$e^{-\int_x^{x+1} \nu_\tau \, d\tau} = q_x$$

also

$$\frac{n_{x+1}}{n_x} = q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x \tag{52}$$

Aus (52) erhalten wir weiter:

$$n_x \cdot (l_x - l_{x+1}) = n_{x+1} \cdot l_x$$

oder

$$n_x \cdot d_x = n_{x+1} \cdot l_x \tag{53}$$

Setzen wir in der Rekursionsformel (53) $n_0 = l_0 = 10{,}000$ so können wir die ganze fiktive Ordnung n_x aus der Ordnung l_x leicht bilden.

Für jede unabhängige Ordnung gilt stets das Gesetz:

$$l_x = l_0 \prod_{\lambda=0}^{\lambda=x-1} p_\lambda \tag{54}$$

entsprechend somit für unsere Ordnung n_x:

$$n_x = n_0 \prod_{\lambda=0}^{x-1} q_\lambda \tag{55}$$

daraus folgt für $n_0 = l_0$ speziell:

$$n_x = d_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_{x-1} \tag{56}$$

Entsprechend gilt für die t jährige Verbleibswahrscheinlichkeit in einer unabhängigen Ordnung:

$$l_{x+t} = l_x \cdot {}_t p_x = l_x \prod_{\lambda=0}^{t-1} p_{x+\lambda} \tag{57}$$

also

$${}_t p_x = \prod_{\lambda=0}^{t-1} p_{x+\lambda} \tag{58}$$

entsprechend für die Ordnung n_x:

$$n_{x+t} = n_x \, {}_t q_x = n_x \prod_{\lambda=0}^{t-1} q_{x+\lambda} \tag{59}$$

und

$${}_t q_x = \prod_{\lambda=0}^{t-1} q_{x+\lambda}$$

Damit ist die Ordnung n_x eindeutig festgelegt. Aus ihr können ohne Schwierigkeiten die Intensitäten ν_x bestimmt werden. Somit ist es gelungen, mit Hilfe von Sterbewahrscheinlichkeiten die Verbindungsrenten auf längstes Leben in eine einfache Form zu bringen, deren weitere mathematische Behandlung genau derjenigen der Verbindungsrenten auf kürzestes Leben entspricht.

Es wird Aufgabe weiterer Untersuchungen sein, den Verlauf und die reale Bedeutung der Ordnung n_x zu erklären, sowie weitere Gesetze und formale Zusammenhänge mit der Ueberlebensordnung herzuleiten und die praktische Anwendbarkeit im einzelnen festzustellen.

6. Kapitel.

Beurteilung des bestehenden Berechnungssystems und Möglichkeiten einer einfacheren Berechnungsart.

Zunächst seien aus den bisherigen Betrachtungen die zur Beurteilung wesentlichen Ergebnisse nochmals zusammengestellt.

Kap. I hat uns mit der Vielgestaltigkeit der Versicherungsformen in der sozialen Hinterlassenenversicherung vertraut gemacht. Zudem haben wir Einblick erhalten in das Wesen und den Aufbau des bestehenden Berechnungssystems. Daraus ging insbesondere die große Anpassungsfähigkeit des Systems bei der Berechnung und Darstellung von Einzelrenten hervor.

Die statistischen Erhebungen in Kap. II zeigen, mit welcher Sorgfalt die Berechnungsgrundlagen gewählt sind und begründen auch die in Kap. I grundsätzlich durchgeführte Abstufung der Rentenbarwerte.

In Kap. III sodann haben wir uns mit den Fehlerquellen des Systems auseinandergesetzt und als wesentliches Resultat gefunden, daß ihre Auswirkung auf Barwerte und Deckungskapitalien ganz unbedeutend ist.

Kap. IV gestattet weitgehenden Einblick in die Zusammensetzung des gesamten Hinterlassenenbestandes, sowie in die äusserst verschiedenartige Struktur der Einzelbestände. Die anschliessenden Berechnungen der jährlichen Rentenzahlungen und der Deckungskapitalien samt ihrer Entwicklung bis zum Beharrungszustand läßt die gute Anwendbarkeit des Systems zur Berechnung ganzer Rentenbestände hervortreten.

Die theoretischen Untersuchungen in Kap. V endlich haben zu einer allgemeinen Lösung der für unser System wichtigen Verbindungsrenten auf längstes Leben geführt.

Nach diesen Untersuchungen sind wir nunmehr in der Lage, das gegenwärtige Berechnungssystem zu beurteilen. Wir wollen uns zunächst Rechenschaft ablegen darüber, welchen Anforderungen und Bedingungen es zu genügen hat.

Die Rentenbarwerte und das damit aufgebaute Berechnungssystem sollen folgende Berechnungen zulassen:

1. Ermittlung des Deckungskapitals ganzer Bestände laufender Renten:
   a) für die Bilanz der Jahresrechnungen;
   b) für die technischen Bilanzen, die als Grundlage für die Prämientarife periodisch aufgestellt werden müssen.
2. Bewertung einzelner Renten:
   a) für die Unfallbelastung der einzelnen Betriebe zur Kontrolle und eventuellen Revision der Zuteilung zu einer bestimmten Gefahrenstufe;
   b) für die Unfallbelastung einzelner Gruppen und Gefahrenklassen zur Kontrolle und eventuellen Revision der Einreihungsgrundsätze;
   c) für die Bestimmung der Rentenauskaufssumme;
   d) für die Bestimmung der Regreßansprüche des Versicherers gegenüber Unternehmern und Dritten.

Das bestehende Berechnungssystem genügt allen diesen Anforderungen. Bei der Fehlerbestimmung des Systems haben wir zudem nachgewiesen, daß auch die Genauigkeit der Berechnungen vollauf befriedigend ist. Anlaß, Möglichkeiten des Ersatzes durch ein einfacheres Berechnungssystem zu untersuchen, geben einzig die aufgeschobenen Renten. Diese treten in die Rechnung ein wegen der einschränkenden Bestimmung über die Maximalhöhe des Gesamt-Rentenbezuges, die dann auch eine Kürzung der Einzelrenten zur Folge hat.

Unseres Erachtens wird es nicht möglich sein, ein einfacheres Berechnungssystem als das bestehende zu finden, das zugleich die Berechnung von Einzelrenten und der Deckungskapitalien ganzer Rentenbestände zuläßt.

Dagegen wird es möglich sein, zur Ermittlung des Deckungskapitals ganzer Rentenbestände, unbekümmert um die Belastung der Einzelrenten, vielleicht Vereinfachungen eintreten zu lassen.

Es könnte mit Rücksicht auf den Umstand, daß in den Deckungskapitalien der Renten an die gesamte Hinterlassenenschaft die gekürzten Renten eine immer kleinere Rolle spielen werden, auch der Versuch gemacht werden, alle Renten als laufende zu berechnen und eine nach einem summarischen Verfahren bestimmte Kürzung in Abzug zu bringen.

Da es uns weiter gelungen ist, für die Verbindungsrenten auf längstes Leben einfache Berechnungsformeln herzuleiten, steht noch die Möglichkeit offen, für den ganzen Hinterlassenenkomplex Verbindungsrenten auf längstes Leben zu berechnen.

Aber alle diese Möglichkeiten vermögen nicht den Eindruck zu erwecken, daß an Stelle des gegenwärtigen Systems als Gesamtheit ein besseres gesetzt werden könnte, das praktische Vorteile bringen würde.

1. Vergleichstabelle der **Relativ. Altersverteilung der Witwen.**

Alter x	Unfallversicherung		Militärversicherung	
	Eintritts-bestand	Beharrungs-zustand	Eintritts-bestand	Beharrungs-zustand
17— 34	288,9	60,3	617,1	146,4
35— 54	547,5	351,4	329,0	414,8
55—100	163,6	588,3	53,9	438,8
Total	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0

2. **Relative Entwicklung der Personenbestände in der Unfallversicherung bis zum Beharrungszustand.**

Art des Personenbestandes	Anzahl Personen nach der Versicherungsdauer von Jahren:				
	0	10	20	30	B. Z.
Witwen:	1000	8468	14594	18767	22185
Kinder:	1000	7768	8699	8699	8699
Einfache Ascend.:	1000	8010	12255	13914	14432
Verbund. Ascend.:	1000	7931	11803	13018	13210
Aus der Verbindung entstehende einfache Ascendenten	—	1006	3241	5122	6045
	—	745	2293	3483	3973
Alle Ascendenten:	2000	17692	29562	35537	37660

3. **Relative Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen in der Unfallversicherung bis zum Beharrungszustand bei Lohnsatz 100.**

Rentengattung	Ungekürzte jährliche Rentenzahlungen nach der Versicherungsdauer von Jahren:					Kürzungsbetrag im B. Z.
	0	10	20	30	B. Z.	
Witwen:	30000	254040	437820	563010	665550	13397
Kinder:	15000	116520	130485	130485	130485	17834
Einfache Ascend.:	20000	160200	244500	278280	288640	
Verbund. Ascend.:	20000	158620	236060	260360	264200	
Aus der Verbindung entstehende einfache Ascendenten	—	20120	64820	102440	120900	106418
	—	14900	45860	69660	79460	
Alle Ascendenten:	40000	353840	591240	710740	753200	106418

4. Absolute Entwicklung der Personenbestände in der Unfallversicherung bis zum Beharrungszustand.

Versicherungsdauer	Witwen	Kinder	Einfache Ascendenten	Verbundene Ascendenten	Aus der Verbindung entstehende einfache Ascendenten	Ascendenten Total	Gesamte Hinterlassenenrentner
0	200	318	109	75	—	184	702
10	1 694	2 470	873	595	131	1 599	5 763
20	2 919	2 766	1 333	885	415	2 633	8 318
30	3 753	2 766	1 517	976	645	3 138	9 657
B. Z.	4 437	2 766	1 573	991	751	3 315	10 518

5. Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen in der Unfallversicherung bis zum Beharrungszustand.

a) bei Lohnsatz 100.

Versich. Dauer	Ungekürzt				Gekürzt			
	Witwen	Kinder	Ascendenten	Total	Witwen	Kinder	Ascendenten	Total
0	6000	4770	3680	14450	5592	3803	2695	12090
10	50810	37054	31983	119847	48201	31492	23428	103121
20	87561	41495	52657	181713	84882	35824	42867	163573
30	112604	41495	62768	216867	109925	35824	52978	198727
B. Z.	133110	41495	66304	240909	130431	35824	56514	222769
(b) bei Lohnsatz 3653 (mittlerer Jahresverdienst der Getöteten 1928-1932)								
B. Z.	4862508	1515812	2422086	8800406	4764644	1308651	2064456	8137752

6. Entwicklung der Deckungs-Kapitalien in der Unfallversicherung bis zum Beharrungszustand. a) bei Lohnsatz 100.

Versich. Dauer	Ungekürzt				Gekürzt			
	Witwen	Kinder	Ascendenten	Total	Witwen	Kinder	Ascendenten	Total
0	79642	32245	42489	154376	—	—	—	—
10	660986	191990	338050	1193026	—	—	—	—
20	1079218	200072	509870	1789160	—	—	—	—
B. Z.	1443086	200072	588120	2231278	1405821	172486	490220	2068527
b) bei Lohnsatz 3653								
B. Z.	52715932	7308630	21484023	81508585	51354642	6300913	17907737	75563292

7. Entwicklung der jährlichen Rentenzahlungen und der Deckungskapitalien in der Unfallversicherung bis zum Beharrungszustand bei variablem Lohnsatz.

a) Jährliche Rentenzahlungen

Versicherungs-Dauer	Lohnsatz	Witwen	Kinder	Ascendenten	Total
0	1000	585	161	254	1000
5	1800	679	225	297	1201
10	1500	731	250	323	1304
15	1500	771	251	345	1367
20	1500	804	243	365	1412
30	1500	851	241	380	1472
50	1500	878	241	381	1500
B. Z.	1500	878	241	381	1500

b) Deckungskapitalien

Versicherungs-Dauer	Lohnsatz	Witwen	Kinder	Ascendenten	Total
0	1000	680	83	237	1000
5	1800	816	126	293	1235
10	1500	885	133	322	1340
15	1500	932	128	339	1399
20	1500	966	125	350	1441
30	1500	1006	125	353	1484
50	1500	1021	125	355	1501
B. Z.	1500	1020	125	355	1500

Literaturnachweis

Bohren: Ungelöste Probleme in der Unfallversicherung. Festgabe Moser 1931.

Giorgio-Nabholz: Die schweizerische Unfallversicherung.

Bundesgesetz über die Kranken- und Unfallversicherung.

Bundesgesetz über die Militärversicherung.

Bohren: Vorlesung über Unfallversicherung im W. S. 1932/33.

Suva: Grundlagen der Deckungskapitalberechnung.

Bohren u. de Cérenville: Versicherungstechnischer Bericht über die Militärversicherung.

Grieshaber: Rechnungsgrundlagen der eidgenössischen Versicherungskasse (E. V. K.).

Moser: Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit.

— Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 21/1926 (M. V. V. 21).

— Vorlesung über Intensitätsfunktion und Sterblichkeitsmessung.

Wyß: Entwicklung und Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungskasse, M. V. V. Heft 24.

Friedli: Altersverteilung der Rentenbezüger der eidgen. Versicherungskasse, M. V. V. Heft 20.

— Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktionen, M. V. V. Heft 13.

— Vorlesungen über ausgewählte Kapitel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik.

Leubin-Hofstetter: Ueber Aktivitäts-, Dienstfähigkeits- und Sterblichkeitsverhältnisse beim Personal der S. B. B. M. V. V. Heft 12.

Riethmann: Zur mathematischen Theorie der Versicherung verbundener Leben, M. V. V. Heft 3.

Iff: Das Gesetz des gleichmäßigen Alterns. (Diss.).

Quiquet: Arbeiten über Versicherung auf mehrere Leben.

Nielsen: Handbuch der Theorie der Gammafunktionen.

Thalmann: Zahlenwerte der Prymschen Funktion zur Berechnung von Rentenbarwerten, M. V. V. Heft 26.

— Der Beharrungszustand in der sozialen Unfallversicherung, Festgabe Moser 1931.

Czuber: Die statistischen Forschungsmethoden.

— Theorie der Beobachtungsfehler.

Lebenslauf.

Geboren am 9. Mai 1909 in Bern, besuchte ich die hiesigen städtischen Primarschulen und trat 1920 in das städtische Progymnasium ein. Im Jahre 1924 erfolgte der Uebertritt in die Realabteilung des Gymnasiums. Im Herbst 1928 bestand ich die Realmaturität und immatrikulierte mich an der hiesigen Universität, um versicherungsmathematischen und mathematischen Studien obzuliegen.

Bern, den 30. September 1933.

Willy Wunderlin.